

# Vom Basiswechsel zum Urknall

Eine Einführung in die  
Allgemeine Relativitätstheorie

von

**Dr. Ralph Hübner**

Wesel, März 2009 (Rev. Juli 2016)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vektoren und Tensoren</b>	<b>2</b>
2.1	Basiswechsel im Grundvektorraum	2
2.1.1	Die Basiswechselformel	3
2.1.2	Kontravariante Vektorkomponenten	4
2.1.3	Tensoren höherer Stufe	5
2.2	Metrik und Skalarprodukt	6
2.2.1	Das Skalarprodukt	7
2.2.2	Der inverse Metrische Tensor	8
2.2.3	Klassifizierung von Metriken	9
2.2.4	Isometrische Transformationen	10
2.3	Der Dualraum	11
2.3.1	Basis des Dualraumes	11
2.3.2	Basiswechsel im Dualraum	12
2.3.3	Duale Tensoren höherer Stufe	13
2.3.4	Identifizierung mit Vektoren	13
2.4	Herauf- und Herunterziehen von Indizes	15
2.5	Tensoroperationen	15
2.5.1	Tensorprodukt	15
2.5.2	Überschiebung	16
2.5.3	Kontraktion	17

<b>3</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b>	<b>18</b>
3.1	Die Koordinatenbasis	19
3.2	Krummlinige Koordinaten	20
3.2.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	20
3.2.2	Tangentialvektorräume	21
3.2.3	Kotangentialräume	22
3.3	Wechsel des Koordinatensystems	22
3.4	Beispiele	23
3.4.1	Polarkoordinaten	23
3.4.2	Kugelkoordinaten	25
<b>4</b>	<b>Die kovariante Ableitung</b>	<b>28</b>
4.1	Die mitbewegte Basis	28
4.2	Paralleltransport und geodätische Kurven	30
4.2.1	Die Parallelverschiebung	30
4.2.2	Die Geodätengleichung	32
4.3	Christoffelsymbole	33
4.3.1	Darstellung durch die Metrik	33
4.3.2	Eigenschaften	35
4.3.3	Berechnung aus einer Lagrangefunktion	35
4.3.4	Geodätische Kurven	37
4.3.5	Beispiele	40
4.4	Kovariante Vektorkomponenten	42
4.5	Erweiterung für Tensoren höherer Stufe	44
4.5.1	Die Produktregel	44

4.5.2	Der Satz von Ricci . . . . .	46
4.6	Beispiele . . . . .	47
4.6.1	Polarkoordinaten . . . . .	47
4.6.2	Kugelkoordinaten . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Der Riemann– Christoffelsche Krümmungstensor . . . . .</b>	<b>52</b>
5.1	Die Identität von Ricci . . . . .	52
5.2	Geometrische Interpretation . . . . .	54
5.3	Symmetrien . . . . .	57
5.4	Die Identität von Bianchi . . . . .	60
5.5	Kontraktionen . . . . .	61
5.5.1	Der Ricci Tensor . . . . .	61
5.5.2	Die Skalare Krümmung . . . . .	61
5.5.3	Die Divergenz des Ricci Tensors . . . . .	62
5.6	Beispiel: Die zweidimensionale Kugelfläche . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Die Einsteinschen Feldgleichungen . . . . .</b>	<b>66</b>
6.1	Der Energie– Impulstensor . . . . .	67
6.1.1	Symmetrie . . . . .	68
6.1.2	Divergenz . . . . .	70
6.2	Der Einsteintensor und Einsteins Feldgleichungen . . . . .	71
6.2.1	Der Einsteintensor . . . . .	72
6.2.2	Die Kosmologische Konstante . . . . .	73
6.2.3	Die Feldgleichungen . . . . .	73
6.2.4	Linearisierung und Newtonscher Grenzfall . . . . .	76

6.3	Die Einstein– Hilbert– Wirkung . . . . .	84
6.3.1	Das vierdimensionale Volumenelement . . . . .	84
6.3.2	Variation von $ g $ . . . . .	86
6.3.3	Hilberts Lagrangedichte . . . . .	87
6.3.4	Variation des Ricci Tensors . . . . .	88
6.3.5	Ableitung der Feldgleichungen . . . . .	90
6.3.6	Die Lagrangedichte der Materie . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Lösung der Feldgleichungen . . . . .</b>	<b>94</b>
7.1	Die Schwarzschildmetrik . . . . .	94
7.1.1	Der radialsymmetrische statische Ansatz . . . . .	94
7.1.2	Berechnung der Christoffelsymbole . . . . .	97
7.1.3	Berechnung des Ricci– und des Einsteintensors . . . . .	99
7.1.4	Lösung der Feldgleichungen . . . . .	102
7.1.5	Vergleich mit dem Newtonschen Grenzfall . . . . .	104
7.1.6	Interpretation der Schwarzschildmetrik . . . . .	105
7.1.7	Größe des Schwarzschildradius . . . . .	109
7.2	Das Friedmann– Lemaître– Modell . . . . .	112
7.2.1	Festlegung der Funktion $f(r)$ . . . . .	113
7.2.2	Das Robertson– Walker– Linienelement . . . . .	117
7.2.3	Berechnung der Christoffelsymbole . . . . .	118
7.2.4	Berechnung des Ricci– und des Einsteintensors . . . . .	120
7.2.5	Energie– Impulstensor einer idealen Flüssigkeit . . . . .	123
7.2.6	Die Friedmanngleichungen . . . . .	126
7.2.7	Das statische Universum Einsteins . . . . .	127

7.2.8	Das strahlungsdominierte Universum . . . . .	128
7.2.9	Das materiedominierte Universum . . . . .	133
7.2.10	Das $\Lambda$ – dominierte Universum . . . . .	139
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>		<b>144</b>



# 1 Einleitung

Urknall, Kosmologie, entfernte Galaxien und Zeitreisen sind Themen, die wahrscheinlich jeden Physiker in seiner vorakademischen Phase fasziniert haben und die vielleicht auch der Anlaß waren, Physik als Studienfach zu wählen. Daher gehört es gewissermaßen zum guten Ton, sich als Physiker früher oder später mit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu befassen, sei es im Selbststudium oder im Rahmen einer Spezialvorlesung. Auf beiden Wegen wird man schnell mit der Tatsache konfrontiert, daß das wichtigste Handwerkszeug bei der Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen ein gutes Verständnis der Differentialgeometrie ist.

Betrüblicherweise wird Differentialgeometrie weder im Grundstudium noch im Hauptstudium der Physik systematisch gelehrt, zumindest war das in meinem Studiengang (RWTH Aachen ab 1978) nicht der Fall. Selbst der Tensorbegriff, auf dem die Differentialgeometrie aufbaut, wurde nicht zufriedenstellend eingeführt. Beide Themen fallen gewissermaßen durch das folgende Raster: In Physikvorlesungen werden diese Kenntnisse bereits vorausgesetzt, und wenn sie nicht vorhanden sind, ist die Einführung entsprechend flüchtig. Mathematische Spezialvorlesungen zur Tensorrechnung oder Differentialgeometrie behandeln diese Themen natürlich mit dem angemessenen Tiefgang, allerdings gehörten sie damals nicht zum Pflichtprogramm eines Physikstudenten. Darüberhinaus herrscht in solchen Veranstaltungen nicht selten die Tendenz der Vermittlung von Inhalten über ein axiomatisches „Top– Down“-Verfahren, welches die Relevanz des behandelten Stoffes für die physikalische Begriffswelt stark verschleiert.

Der vorliegende Text ist ein Versuch, diese Lücke ein wenig zu schließen und sowohl den Tensorbegriff als auch die Kenntnisse über krummlinige Koordinatensysteme so weit auszubauen, daß die Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation möglich wird. Die Darstellung beschränkt sich auf den Ricci–Kalkül und vermeidet den heute geläufigen koordinatenfreien Zugang. Auf diese Weise knüpfen wir an das aus den Standardvorlesungen vorhandene Wissen an und präsentieren die Grundlagen der Differentialgeometrie in der historischen Form, die vermutlich Einstein selbst von Marcel Grossmann vor 1915 beigebracht bekam.

Ein kurzes Literaturverzeichnis am Schluß soll das Fehlen von Zitaten im laufenden Text ausgleichen und die wichtigsten Quellen für das hier präsentierte Material vorstellen. Nicht alles ist öffentlich verfügbar [1] [2], wohl aber die Standardreferenzen zur Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie [5] [6] [7]. Paulis Enzyklopädieartikel [5] ist gut zu lesen und verwendet trotz seines Alters bereits weitgehend die heutzutage üblichen Begriffe und Symbole. Schließlich sind die Internetquellen [20] [21] von John C. Baez gerade für Einsteiger in die Allgemeine Relativitätstheorie sehr zu empfehlen.

## 2 Vektoren und Tensoren

Natürlich bedeutet die in der Einleitung formulierte Kritik nicht, daß Physiker nicht mit Tensoren umgehen können. Selbstverständlich ist das Transformationsverhalten von Tensoren allgemein bekannt, wodurch sich zumindest Rechnungen mit Tensor-komponenten durchführen lassen. Oft bleibt jedoch unklar, um welche Art von Trans-formationen es sich dabei handelt: Aktive Transformationen wie Paritätswechsel und Drehung oder passive Transformationen wie der Wechsel der verwendeten Basis? Für gewöhnlich herrscht die Meinung vor, dieser Unterschied sei belanglos und beide Trans-formationenarten beschrieben irgendwie das gleiche.

Mit der Einführung von Kreuzprodukten entstehen sogenannte Axial- oder Pseudovek-toren mit undurchsichtigen Tensoreigenschaften, da der Wechsel von einer rechtshändi-gen zu einer linkshändigen Basis nicht ohne weiteres möglich zu sein scheint. Verwir-rungen dieser Art werden wir vermeiden, indem wir die Transformationen von Vektoren und Tensoren streng auf den passiven Basiswechsel beschränken. Auf diese Weise wird der rechnerische Umgang mit einer geeigneten „Philosophie“ verknüpft, welche später den Einstieg in die Differentialgeometrie erleichtert.

### 2.1 Basiswechsel im Grundvektorraum

Wir betrachten einen Vektor  $\underline{x}$  des Vektorraumes  $\mathbb{V}^n$ , der in einer beliebigen Basis  $\{\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_n\}$  dargestellt wird:

$$\underline{x} = x^i \underline{u}_i . \tag{2.1}$$

Hier wie auch im restlichen Text wird über ein hoch- und tiefstehendes Indexpaar gemäß der **Einsteinschen Summationskonvention** summiert. Wir wollen nun die oben erwähnte „Philosophie“ der Tensoren am Beispiel des Vektors  $\underline{x}$  verständlich machen und betrachten hierfür die Gleichung (2.1) unter zweierlei Aspekten:

– *Der invariante Aspekt:*

Der Vektor  $\underline{x}$  ist ein geometrisches Objekt, dessen Eigenschaften vollkommen unabhängig von der gewählten Basis sind. Diese Eigenschaften existieren gegebenenfalls auch ohne eine Basis. Wählt man als Visualisierung einen Pfeil im Raum und denkt sich das durch die Basis erzeugte Koordinatensystem weg, bleibt es ein Pfeil mit bestimmter Länge und Orientierung im Raum.

– *Der willkürliche Aspekt:*

Manchmal kann man jedoch auf ein Koordinatensystem nicht verzichten und ist dann gezwungen, statt des Vektors  $\underline{x}$  dessen Komponenten  $x^i$  bezüglich einer Basis  $\underline{u}_i$  zu betrachten. Die Wahl dieser Basis ist jedoch beliebig und kann den momentanen Bedürfnissen angepaßt werden. Alle denkbaren Basissysteme sind vollkommen gleichwertig.

Hätten wir also statt der Basis  $\underline{u}_i$  eine Basis  $\underline{u}_{j'}$  gewählt, müßten wir den Vektor  $\underline{x}$  nicht mit den Komponenten  $x^i$  sondern mit den Komponenten  $x^{j'}$  beschreiben:

$$\underline{x} = x^{j'} \underline{u}_{j'}. \quad (2.2)$$

Dabei ist zu bedenken, daß  $\underline{x}$  noch immer das gleiche Objekt wie in (2.1) darstellt.

### 2.1.1 Die Basiswechselmatrix

Die oben beschriebene geometrische Invarianz des Vektors  $\underline{x}$  hat zur Folge, daß die Komponenten  $x^i$  und  $x^{j'}$  keine voneinander unabhängigen Zahlentupel sind sondern über den Zusammenhang zwischen den beiden Basissystemen miteinander in Verbindung stehen. Diesen Zusammenhang legen wir fest, indem wir jeden „neuen“ Basisvektor  $\underline{u}_{j'}$  als Linearkombination der „alten“ Basisvektoren  $\underline{u}_i$  schreiben:

$$\underline{u}_{j'} = \Lambda_{j'}^i \underline{u}_i. \quad (2.3)$$

Die Zahlen  $\Lambda_{j'}^i$  vermitteln zwischen alter und neuer Basis und formen die sogenannte Basiswechselmatrix

$$\underline{\underline{\Lambda}} = [\Lambda_{j'}^i]. \quad (2.4)$$

Unabhängig von der Hoch- oder Tiefstellung steht der Zeilenindex links und der Spaltenindex rechts. Die in eckigen Klammern eingeschlossenen Komponenten sind als Zahlenschema im Sinne der elementaren Matrizenrechnung zu verstehen, auf welche bei Bedarf die bekannten Rechenmethoden anzuwenden sind. Da die Zuordnung (2.3) umkehrbar sein soll, muß die Basiswechselmatrix invertierbar sein und darf keine verschwindende Determinante besitzen:

$$|\underline{\underline{\Lambda}}| \neq 0. \quad (2.5)$$

Die inverse Basiswechsellmatrix ermöglicht uns, die alten Basisvektoren als Linearkombination der neuen auszudrücken:

$$\underline{u}_i = \Lambda_i^{j'} \underline{u}_{j'} \quad (2.6)$$

$$[\Lambda_i^{j'}] := [\Lambda_{j'}^i]^{-1}. \quad (2.7)$$

Dem Ricci– Kalkül folgend haben wir mit (2.7) für die inverse Basiswechsellmatrix einen eigenen Ausdruck eingeführt. Verglichen mit den Komponenten der Basiswechsellmatrix selbst wurde nur der gestrichene mit dem ungestrichenen Index vertauscht. Abgesehen von der für den Anfänger bestehenden Verwechslungsgefahr produziert der Ricci– Kalkül übersichtliche und gut lesbare Formeln. In Matrixkomponenten geschrieben lautet der Zusammenhang zwischen der Basiswechsellmatrix und ihrem Inversen

$$\underline{\Lambda} \underline{\Lambda}^{-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{j'}^k \Lambda_k^{i'} = \delta_{j'}^{i'}. \quad (2.8)$$

Es macht übrigens keinen Sinn, die Basiswechsellmatrix als Tensor zu interpretieren, und somit sind die  $\Lambda_{j'}^i$  und  $\Lambda_i^{j'}$  tatsächlich nur reine Zahlenmatrizen.

### 2.1.2 Kontravariante Vektorkomponenten

Interessanter als der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren ist die nach einem Basiswechsel notwendige Neuberechnung der Vektorkomponenten  $x^i$ . Zu diesem Zweck untersuchen wir, wie sich der Zusammenhang zwischen den alten Komponenten  $x^i$  und den neuen Komponenten  $x^{j'}$  mit Hilfe der Basiswechsellmatrix ausdrücken läßt:

$$\underline{x} = x^{j'} \underline{u}_{j'} = x^{j'} \Lambda_{j'}^i \underline{u}_i = x^i \underline{u}_i, \quad (2.9)$$

wobei zuerst (2.3) und anschließend (2.1) verwendet wurde. Betrachten wir den rechten Teil dieser Gleichungskette und nutzen die lineare Unabhängigkeit der  $\underline{u}_i$  aus, erhalten wir

$$x^{j'} \Lambda_{j'}^i = x^i \quad (2.10)$$

und somit eine Umrechnungsvorschrift für die Komponenten  $x^{j'}$ . Vergleichen wir, wie sich Basisvektoren und Komponenten transformieren:

$$\underline{u}_{j'} = \Lambda_{j'}^i \underline{u}_i \quad (2.11)$$

$$x^i = \Lambda_{j'}^i x^{j'}. \quad (2.12)$$

Es fällt auf, daß die  $\Lambda_{j'}^i$  neue Basisvektoren aus alten Basisvektoren, jedoch alte Komponenten aus neuen Komponenten berechnen. Dieses Verhalten nennt man **kontravariant** und sagt, die Komponenten transformieren sich im Vergleich zu den Basisvektoren **kontragredient**. Will man die neuen Komponenten durch die alten ausdrücken, muß man mit der inversen Basiswechselmatrix arbeiten. Es gilt:

$$[x^i] = \underline{\underline{\Lambda}}^T \cdot [x^{j'}] \quad (2.13)$$

$$[x^{j'}] = (\underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1} \cdot [x^i]. \quad (2.14)$$

Die eckigen Klammern symbolisieren die aus den Vektorkomponenten gebildeten Zahlentupel, der Punkt  $\cdot$  steht für die Matrix– Vektor– Multiplikation und  $^T$  kennzeichnet die Transposition einer Matrix. Offenbar werden die neuen Komponenten des Ortsvektors aus den alten mit Hilfe der inversen transponierten Basiswechselmatrix berechnet. Durch Verwendung der Schreibweise (2.7) für die inverse Basiswechselmatrix erhält die Formel für die Transformation kontravarianter Vektorkomponenten ihre endgültige Gestalt:

$$\underline{u}_{j'} = \Lambda_{j'}^i \underline{u}_i \quad (2.15)$$

$$x^{j'} = \Lambda^{j'}_i x^i. \quad (2.16)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, das Inversion und Transposition vertauschbar sind.

### 2.1.3 Tensoren höherer Stufe

Ein Tensorraum  $p$ -ter Stufe entsteht durch das  $p$ -fache kartesische Produkt des Grundvektorraumes mit sich selbst. Seine Elemente heißen **Tensoren** und kombinieren Vektoren aus  $p$  Grundvektorräumen miteinander. Diese Art der direkten Multiplikation von Vektoren kennzeichnen wir mit dem Symbol  $\otimes$  und sprechen von einem  $p$ -fachen tensoriellen Produkt. Ein solcher Tensorraum ist selbst ein  $n^p$ -dimensionaler Vektorraum, der die zusätzliche Struktur des oben angesprochenen  $p$ -fachen kartesischen Produktes besitzt. Als Ausdruck dieser Zusatzstruktur haben seine Basiselemente die Gestalt

$$\underline{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}_{i_p}, \quad (2.17)$$

und die Komponenten eines Tensors  $\boldsymbol{x}$  werden mit  $p$  Indizes versehen:

$$\boldsymbol{x} = x^{i_1 \cdots i_p} \underline{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}_{i_p}. \quad (2.18)$$

Wir nennen  $\boldsymbol{x}$  einen Tensor  $p$ -ter Stufe. Führt man in (2.18) einen Basiswechsel durch, geschieht dieser gleichzeitig in allen Grundvektorräumen. Da unter dem Tensorprodukt die Linearität in den einzelnen Faktoren erhalten bleibt, können wir schreiben:

$$\underline{u}_{j'_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}_{j'_p} = \Lambda_{j'_1}^{i_1} \cdots \Lambda_{j'_p}^{i_p} \underline{u}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}_{i_p} \quad (2.19)$$

$$x^{i_1 \cdots i_p} = \Lambda_{j'_1}^{i_1} \cdots \Lambda_{j'_p}^{i_p} x^{j'_1 \cdots j'_p}. \quad (2.20)$$

Erneut läßt sich das kontragrediente Verhalten von Basistensoren und Komponenten beobachten, welches dazu führt, daß wie bei kontravarianten Komponenten von Vektoren mit der inversen transponierten Basiswechsellmatrix gearbeitet werden muß:

$$x^{j'_1 \cdots j'_p} = \Lambda_{i_1}^{j'_1} \cdots \Lambda_{i_p}^{j'_p} x^{i_1 \cdots i_p}. \quad (2.21)$$

Die  $x^{i_1 \cdots i_p}$  werden als die  **$p$ -fach kontravarianten Komponenten des Tensors  $\boldsymbol{x}$**  bezeichnet. Abschließend möchten wir noch erwähnen, daß das Tensorprodukt für Tensoren nullter Stufe in das gewöhnliche Produkt des Koeffizientenkörpers übergeht, da diese Skalare gewissermaßen als Koeffizienten ohne Basis angesehen werden können. Das Tensorprodukt von  $p$  Zahlen  $z^{(1)}, \dots, z^{(p)}$  lautet somit

$$z^{(1)} \otimes z^{(2)} \otimes \cdots \otimes z^{(p)} := z^{(1)} z^{(2)} \cdots z^{(p)}. \quad (2.22)$$

## 2.2 Metrik und Skalarprodukt

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitationskraft als geometrische Eigenschaft des Raum–Zeitkontinuums interpretiert. Um allerdings Geometrie betreiben zu können, benötigen wir ein Verfahren zur Festlegung von Längen und Winkeln im Grundvektorraum  $\mathbb{V}^n$ . Diese Größen werden den betrachteten Objekten selbst zugeschrieben und dürfen sich bei einem Basiswechsel nicht ändern. Die einzigen Zahlenwerte, die wir bisher Vektoren zugeordnet haben, sind deren basisabhängige Komponenten. Für eine invariante Definition von Längen und Winkeln ist die Erweiterung des abstrakten Grundvektorraumes  $\mathbb{V}^n$  durch eine zusätzliche Struktur erforderlich. Diese Struktur ist die Metrik, welche den Grundvektorraum  $\mathbb{V}^n$  zu einem metrischen Raum werden läßt.

### 2.2.1 Das Skalarprodukt

Realisiert wird die Metrik durch eine Bilinearform, die jeweils zwei Vektoren  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  miteinander verknüpft und ihnen eine reelle Zahl  $s$  zuordnet:

$$s = (\underline{x} \cdot \underline{y}). \quad (2.23)$$

Die Zahl  $s$  nennen wir das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Da die Reihenfolge der Faktoren hierbei keine Rolle spielen soll, ist das Produkt kommutativ und die Bilinearform symmetrisch:

$$(\underline{x} \cdot \underline{y}) = (\underline{y} \cdot \underline{x}). \quad (2.24)$$

Aufgrund der Linearität in beiden Faktoren ist das Skalarprodukt bereits durch die Angabe der Produkte der Basisvektoren vollständig definiert:

$$(\underline{x} \cdot \underline{y}) = x^i y^j (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j) =: x^i y^j g_{ij}. \quad (2.25)$$

Alle Eigenschaften der Bilinearform konzentrieren sich in der Matrix  $g_{ij}$ , deren Struktur auch ihre Symmetrie widerspiegelt:

$$g_{ij} = g_{ji} = (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j). \quad (2.26)$$

Das Verhalten der  $g_{ij}$  bei einem Basiswechsel beweist, daß es sich um Tensorkomponenten handelt:

$$g_{i'j'} = (\underline{u}_{i'} \cdot \underline{u}_{j'}) = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j) = \Lambda_{i'}^i \Lambda_{j'}^j g_{ij}. \quad (2.27)$$

Im Gegensatz zu Vektorkomponenten transformieren sich die  $g_{ij}$  in (2.27) nicht kontragredient sondern kogredient mit Hilfe der Basiswechsellmatrix selbst. Eine ausführlichere Analyse dieses Verhaltens präsentieren wir im Abschnitt über den Dualraum und begnügen uns hier mit der Charakterisierung der  $g_{ij}$  als **kovariante Komponenten des Metrischen Tensors  $\mathbf{g}$** . Schließlich möchten wir noch demonstrieren, wie sich die Länge  $|\underline{x}|$  eines Vektors  $\underline{x}$  und der Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Vektoren  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  durch den Metrischen Tensor auf basisunabhängige Weise ausdrücken lassen:

$$(\underline{x} \cdot \underline{x}) = |\underline{x}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\underline{x}| = \sqrt{g_{ij} x^i x^j} \quad (2.28)$$

$$(\underline{x} \cdot \underline{y}) = |\underline{x}| |\underline{y}| \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{g_{ij} x^i x^j} \sqrt{g_{ij} y^i y^j}}. \quad (2.29)$$

Diese Darstellung von Längen und Winkeln zeigt, daß der Name **Metrik** für den Tensor  $\mathbf{g}$  und die  $g_{ij}$  gut gewählt ist.

### 2.2.2 Der inverse Metrische Tensor

Im Folgenden gehen wir davon aus, daß die Metrik nicht entartet ist und daß die Determinante der Komponentenmatrix von  $\underline{\underline{g}}$  mit

$$|\underline{\underline{g}}| \neq 0 \quad (2.30)$$

nicht verschwindet. Damit läßt sich diese Matrix invertieren, wobei wir die inverse Komponentenmatrix mit hochgestellten Indizes schreiben:

$$[g^{ij}] := [g_{ij}]^{-1}. \quad (2.31)$$

Der Zusammenhang zwischen der Komponentenmatrix und ihrem Inversen lautet:

$$\underline{\underline{g}} \underline{\underline{g}}^{-1} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j. \quad (2.32)$$

Um das Transformationsverhalten der  $g^{ij}$  zu studieren, schreiben wir zunächst die Transformationsvorschrift (2.27) für die  $g_{ij}$  in Form einer Matrixgleichung:

$$\underline{\underline{g}}' = \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\Lambda}}^T. \quad (2.33)$$

Durch Inversion dieser Gleichung erhalten wir die Transformationsvorschrift für die invertierte Komponentenmatrix:

$$\underline{\underline{g}}'^{-1} = (\underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1} \underline{\underline{g}}^{-1} \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} \quad (2.34)$$

oder als Gleichung in Komponenten:

$$g'^{i'j'} = \Lambda^{i'}_i \Lambda^{j'}_j g^{ij}. \quad (2.35)$$

Die  $g^{ij}$  sind somit ebenfalls Komponenten eines Tensors  $\underline{\underline{g}}^{-1}$  und transformieren sich zweifach kontragredient.

### 2.2.3 Klassifizierung von Metriken

Einem Satz der linearen Algebra zufolge ist es möglich, symmetrische Tensoren durch einen Basiswechsel in Diagonalform zu bringen. Die Komponenten des Metrischen Tensors lauten in diesem Fall

$$g_{ij} = (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j) = 0 \quad i \neq j. \quad (2.36)$$

Geometrisch interpretiert stehen die Basisvektoren aufeinander senkrecht und bilden zu dieser Metrik eine Orthogonalbasis. Durch geschickte Wahl der Skalierung ist es weiterhin möglich, die verbleibenden Diagonalelemente auf 1 zu normieren und eine Orthonormalbasis zu erhalten:

$$g_{ii} = (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_i) = \pm 1. \quad (2.37)$$

Der **Trägheitssatz von Sylvester** besagt, daß in (2.37) die Anzahl  $N_R$  der **reellen** Basisvektoren ( $g_{ii} > 0$ ) und die Anzahl  $N_I$  der **imaginären** Basisvektoren ( $g_{ii} < 0$ ) für jede Metrik charakteristisch ist und bei einem Basiswechsel erhalten bleibt. Die Zahlen  $N_R$  und  $N_I$  haben die Eigenschaft

$$N_R + N_I = n \quad (2.38)$$

$$N_R - N_I = s, \quad (2.39)$$

wobei  $n$  die Dimension des Grundvektorraumes und  $s$  die **Signatur** der Metrik ist. Abhängig von ihrer Signatur werden Metriken in zwei Klassen eingeteilt:

– *Euklidische (Riemannsche) Metriken:*

Mit  $s = \pm n$  existieren nur reelle oder nur imaginäre Vektoren, und die Metrik ist positiv oder negativ definit. Damit sind Quadrate von Vektoren immer positiv oder negativ, und die Metrik verhält sich so, wie wir es aus der Euklidischen Geometrie des  $\mathbb{R}^3$  gewohnt sind. In krummlinigen Koordinatensystemen heißen solche Metriken nicht **Euklidisch** sondern **Riemannsch**.

– *Pseudoeuklidische (Pseudoriemannsche) Metriken:*

Es existieren sowohl reelle als auch imaginäre Vektoren, und die Metrik ist indefinit. Damit können Quadrate von Vektoren positiv und negativ sein oder sogar verschwinden, wodurch sich eine solche Metrik nicht wie die Euklidische Geometrie des  $\mathbb{R}^3$  verhält. Beispiel für einen Vektorraum mit pseudoeuklidischer Geometrie ist der Minkowskiraum mit der Signatur  $s = \mp 2$ . In krummlinigen Koordinatensystemen heißen Metriken dieser Art nicht **Pseudoeuklidisch** sondern **Pseudoriemannsch**.

### 2.2.4 Isometrische Transformationen

Eine besondere Klasse von Basistransformationen hat die Eigenschaft, zwar Basisvektoren und Vektorkomponenten zu verändern, die Komponenten  $g_{ij}$  des Metrischen Tensors jedoch unangetastet zu lassen. Diese speziellen Transformationen werden **isometrisch** genannt und müssen als Matrix  $\underline{\underline{\Lambda}}$  ausgedrückt folgende Bedingung erfüllen:

$$\underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{g}} \underline{\underline{\Lambda}}^T = \underline{\underline{g}}. \quad (2.40)$$

Wenden wir die Produktregel für Determinanten an, können wir eine Aussage über die Determinante von  $\underline{\underline{\Lambda}}$  gewinnen:

$$|\underline{\underline{\Lambda}}|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |\underline{\underline{\Lambda}}| = \pm 1. \quad (2.41)$$

Wir möchten die Bedeutung der isometrischen Transformationen durch zwei bekannte Beispiele verdeutlichen:

– *Euklidische Metrik:*

Die Standardmetrik des  $\mathbb{R}^n$  lautet in einer Orthonormalbasis

$$\underline{\underline{g}} = \mathbb{1}, \quad (2.42)$$

wodurch die Bedingung (2.40) die Gestalt

$$\underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{\Lambda}}^T = \mathbb{1} \quad (2.43)$$

annimmt. Diese Gleichung läßt sich als Aussage über die inverse Basiswechselmatrix interpretieren:

$$\underline{\underline{\Lambda}}^{-1} = \underline{\underline{\Lambda}}^T. \quad (2.44)$$

Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen **orthogonal** und beschreiben geometrisch eine Drehung der Basisvektoren im Raum. Wendet man diese Beziehung auf die Transformationsvorschrift (2.14) für kontravariante Vektorkomponenten an, zeigt sich, daß bei orthogonalen Transformationen der Unterschied zwischen kontra- und kogredient verschwindet:

$$[x^{j'}] = (\underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1} \cdot [x^i] = \underline{\underline{\Lambda}} \cdot [x^i]. \quad (2.45)$$

Das ist auch der Grund, weswegen bei der elementaren Einführung des  $\mathbb{R}^3$  und seines Skalarproduktes weder der Metrische Tensor noch kontra- und kovariante Komponenten mit hoch- oder tiefgestellten Indizes eine Rolle spielen.

– *Minkowskimetrik:*

Die Minkowskimetrik ist pseudo-euklidisch und hat in einer Orthonormalbasis die Gestalt

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{„West Coast Metric“}. \quad (2.46)$$

Die hier gewählte Vorzeichenkonvention entspricht der Signatur  $s = -2$ , die ebenfalls mögliche komplementäre Wahl der Vorzeichen mit  $s = 2$  wird im Fachjargon „East Coast Metric“ genannt. Isometrische Transformationen der Minkowskimetrik sind Lorentztransformationen mit der Eigenschaft  $|\underline{\Lambda}| = 1$ . Da jedoch

$$[g_{\mu\nu}] \neq \mathbb{1} \quad (2.47)$$

gilt, sind Lorentztransformationen keine orthogonalen Matrizen, obwohl sie eine Orthonormalbasis in eine neue Orthonormalbasis überführen. Folglich muß in der Relativitätstheorie der Ricci-Kalkül mit hoch- und tiefgestellten Indizes im vollen Umfang berücksichtigt werden, auch wenn sich dessen Auswirkung nur auf wenige Vorzeichenwechsel beschränkt.

## 2.3 Der Dualraum

Mit Hilfe des im letzten Kapitel eingeführten Skalarproduktes lassen sich zwei Vektoren unabhängig von der gewählten Basis einer Zahl zuordnen. Eine alternative Methode der invarianten Verknüpfung von Vektoren und Zahlen sind Linearformen, die im Gegensatz zum Skalarprodukt nur jeweils einen Vektor auf eine Zahl abbilden. Beispiele für solche Linearformen sind Richtungsableitungen von Feldern oder Differentiale entlang Koordinatenlinien. Mit der Bezeichnung **Linearform** wird angedeutet, daß diese Abbildungen bezüglich ihres Argumentvektors linear sind und selbst einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum bilden. Dieser Raum der linearen Abbildungen ist aus dem Grundvektorraum  $\mathbb{V}^n$  abgeleitet und wird als dessen **Dualraum**  $\mathbb{V}^{*n}$  bezeichnet.

### 2.3.1 Basis des Dualraumes

Wendet man eine Linearform  $\chi()$  auf den Argumentvektor

$$\underline{y} = y^i \underline{u}_i \quad (2.48)$$

an, ergibt sich aufgrund der Linearität von  $\chi()$

$$\chi(\underline{y}) = \chi(y^i \underline{u}_i) = y^i \chi(\underline{u}_i). \quad (2.49)$$

Angehängte Klammersymbole  $()$  sollen den Abbildungscharakter der betrachteten Größe unterstreichen. Man kann in diesem Ausdruck die Zerlegung von  $\chi()$  in einer Basis des Raumes der Abbildungen erkennen, welche durch die Basis  $\underline{u}_i$  des Grundvektorraumes generiert wird. Bei der Aufteilung von (2.49) in Komponenten und Basisabbildungen ist zu bedenken, daß das dem Argumentvektor entnommene  $y^i$  keine Eigenschaft der Linearform  $\chi$  darstellt und somit als deren Komponente nicht in Frage kommt. Vielmehr läßt sich dieser Term sinnvoll als das Resultat einer Basisform interpretieren, die auf  $\underline{y}$  angewandt wurde. Damit haben die einzelnen Bestandteile von (2.49) die Bedeutung

$$y^i =: u^i(\underline{y}) \quad \text{Basisabbildung} \quad (2.50)$$

$$\chi_i := \chi(\underline{u}_i) \quad \text{Koeffizient,} \quad (2.51)$$

und die Entwicklung von  $\chi()$  in der Basis  $u^i()$  des Dualraumes lautet

$$\chi(\underline{y}) = \chi_i u^i(\underline{y}). \quad (2.52)$$

### 2.3.2 Basiswechsel im Dualraum

Wird im Grundvektorraum  $\mathbb{V}^n$  ein Wechsel der Basis vorgenommen, induziert dieser Prozeß auch einen Basiswechsel im Dualraum  $\mathbb{V}^{*n}$ . Betrachten wir zunächst die Basisabbildungen  $u^i()$ , die sich laut (2.50) wie die Komponenten  $y^i$  des Argumentvektors transformieren:

$$y^{j'} = \Lambda^{j'}_i y^i \quad \Rightarrow \quad u^{j'}() = \Lambda^{j'}_i u^i(). \quad (2.53)$$

Die Klammern sind eine zusätzliche Hilfe zur Unterscheidung der Basisabbildung  $u^i()$  vom Basisvektor  $\underline{u}_i$ . Bei den Komponenten  $\chi_i$  können wir die Linearität von  $\chi()$  ausnutzen:

$$\chi_{j'} = \chi(\underline{u}_{j'}) = \chi(\Lambda_{j'}^i \underline{u}_i) = \Lambda_{j'}^i \chi(\underline{u}_i) = \Lambda_{j'}^i \chi_i. \quad (2.54)$$

In der Zusammenfassung sieht ein Basiswechsel im Dualraum folgendermaßen aus:

$$u^{j'}() = \Lambda^{j'}_i u^i() \quad (2.55)$$

$$\chi_{j'} = \Lambda_{j'}^i \chi_i. \quad (2.56)$$

Die Basisabbildungen  $u^i()$  transformieren sich somit kontragredient und die Koeffizienten  $\chi_i$  kogredient.

### 2.3.3 Duale Tensoren höherer Stufe

Dualräume lassen sich wie ihre Grundvektorräume zu einem  $p$ -fachen kartesischen Produkt zusammenschließen, wodurch sie einen dualen Tensorraum  $p$ -ter Stufe bilden. Die Basiselemente dieses Raumes haben die Gestalt

$$u^{i_1}() \otimes \cdots \otimes u^{i_p}(), \quad (2.57)$$

weswegen die Komponenten dualer Tensoren konsequenterweise mit  $p$  untenstehenden Indizes versehen werden:

$$\chi() = \chi_{i_1 \dots i_p} u^{i_1}() \otimes \cdots \otimes u^{i_p}(). \quad (2.58)$$

Diese Komponenten transformieren sich bei einem Basiswechsel  $p$ -fach kogredient:

$$\chi_{j'_1 \dots j'_p} = \Lambda_{j'_1}^{i_1} \cdots \Lambda_{j'_p}^{i_p} \chi_{i_1 \dots i_p}. \quad (2.59)$$

Wir nennen die  $\chi_{i_1 \dots i_p}$  die  **$p$ -fach kovarianten Komponenten des dualen Tensors  $\chi()$** . Die Basisformen in (2.58) bestehen aus jeweils  $p$  Basisabbildungen  $u^i()$ , von denen jede nach dem Einsetzen eines Argumentvektors eine skalare Zahl produziert. Da laut (2.22) das Tensorprodukt  $\otimes$  für Skalare zum gewöhnlichen Produkt degeneriert, ordnet jede Basisform aus (2.58)  $p$  Vektoren eine einzige Zahl zu. Der duale Tensor  $\chi()$  wird somit selbst zu einer Multilinearform, welche aus  $p$  Vektoren einen skalaren Zahlenwert erzeugt. Dieses gilt strenggenommen auch für den Metrischen Tensor mit  $p = 2$ , der korrekterweise als **Metrischer dualer Tensor zweiter Stufe** bezeichnet und gemäß den hier verwendeten Konventionen als  $g()$  geschrieben werden müßte. Wir passen uns in diesem Fall jedoch der allgemein üblichen Schreibweise an und nennen den Metrischen Tensor weiterhin  $g$ .

### 2.3.4 Identifizierung mit Vektoren

Obwohl der Dualraum  $\mathbb{V}^{*n}$  seine Struktur auf die in Abschnitt 2.3.1 beschriebene Weise aus dem Grundvektorraum  $\mathbb{V}^n$  bezieht, sind beide Räume zunächst streng voneinander zu unterscheiden. Allerdings besitzen sie die gleiche Dimension  $n$  und sind somit wenigstens als abstrakte Vektorräume zueinander isomorph. Um nun tatsächlich eine bestimmte Linearform  $\chi()$  mit einem bestimmten Vektor  $\underline{x}$  identifizieren zu können,

benötigen wir einen expliziten Isomorphismus, der zwischen  $\mathbb{V}^n$  und  $\mathbb{V}^{*n}$  vermittelt. Ein solcher Isomorphismus läßt sich mit Hilfe der Metrik konstruieren indem wir festlegen:

$$\chi(\underline{y}) := (\underline{x} \cdot \underline{y}). \quad (2.60)$$

Durch diese Definition ist es möglich, die  $\chi_i$  dem Vektor  $\underline{x}$  selbst zuzuordnen und als eine Art alternativer Vektorkomponenten  $x_i$  zu interpretieren:

$$x_i := \chi_i = \chi(\underline{u}_i) = (\underline{x} \cdot \underline{u}_i) = x^j (\underline{u}_j \cdot \underline{u}_i) = x^j g_{ji}. \quad (2.61)$$

Beide Arten von Komponenten lassen sich also mit Hilfe des Metrischen Tensors  $\mathbf{g}$  bzw. dessen Inversen ineinander umrechnen:

$$x_i = g_{ij} x^j \quad (2.62)$$

$$x^i = g^{ij} x_j. \quad (2.63)$$

Mit (2.61) hat sich der folgende Sprachgebrauch etabliert: Die  $x^i$  sind die kontravarianten und die  $x_i$  die kovarianten Komponenten des Vektors  $\underline{x}$ . Es ist zu beachten, daß diese Betrachtungsweise nur bei Vorhandensein einer Metrik erlaubt ist. Ohne Metrik existieren nur die kontravarianten Komponenten  $x^i$  eines Vektors  $\underline{x}$  und die kovarianten Komponenten  $\chi_i$  einer Linearform  $\chi()$ .

Schließlich wollen wir untersuchen, zu welchen Vektoren des Grundvektorraums  $\mathbb{V}^n$  die Basisabbildngen  $u^i()$  isomorph sind. Hierfür verwenden wir als Ansatz spezielle Vektoren  $\underline{u}^{(i)}$  und prüfen deren Wirkung auf einen Vektor  $\underline{y}$ :

$$\underline{u}^{(i)} := g^{il} \underline{u}_l \quad (2.64)$$

$$u^i() = (\underline{u}^{(i)} \cdot ) = g^{il} (\underline{u}_l \cdot ) \quad (2.65)$$

$$u^i(\underline{y}) = g^{il} (\underline{u}_l \cdot \underline{y}) = g^{il} g_{lk} y^k = \delta_k^i y^k = y^i. \quad (2.66)$$

In der letzten Gleichung zeigt sich, daß der Ansatz (2.64) richtig gewählt ist und zum korrekten Verhalten der Basisabbildung  $u^i()$  im Sinne von (2.50) führt. Trotzdem entsteht der Eindruck, daß der Ricci– Kalkül hier an seine Grenzen stößt. Eine spezielle Linearkombination von Basisvektoren  $\underline{u}_i$  wird gewissermaßen automatisch zur Linearform und mit einem obenstehenden Index versehen, obwohl sie ein Element des Grundvektorraums  $\mathbb{V}^n$  repräsentieren soll. Diese vermeintliche Schwäche des Ricci– Kalküls ist gleichzeitig sein größter Vorteil: Formales Vorgehen führt zu korrekten Resultaten, ohne daß der mathematische Charakter der verwendeten Größen notwendigerweise verstanden sein muß.

## 2.4 Herauf- und Herunterziehen von Indizes

Der in Abschnitt 2.3.4 vorgestellte Wechsel zwischen kontra- und kovarianten Vektor-  
komponenten wird im physikalischen Fachjargon salopp als **Heraufziehen** und **Herunterziehen** des Index bezeichnet. Es spricht nichts dagegen, dieses Verfahren auch auf  
Tensoren höherer Stufe auszuweiten und jeweils getrennt in den einzelnen Grundvek-  
torräumen bzw. Dualräumen durchzuführen. Auf diese Weise können mehrfach Indizes  
herauf- oder heruntergezogen werden wie beispielsweise in

$$x_{i_1 \dots i_p} = g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_p j_p} x^{j_1 \dots j_p} . \quad (2.67)$$

Es lassen sich auch Mischformen erzeugen wie in

$$x^{i_1 \quad i_3}_{j_2} = g_{j_2 i_2} x^{i_1 i_2 i_3} , \quad (2.68)$$

wobei in (2.68) von den **zweifach kontravarianten und einfach kovarianten Kom-  
ponenten des Tensors  $\boldsymbol{x}$**  gesprochen wird. Wichtig ist, daß durch korrekte Einrückun-  
gen in den Indexgruppen nachgehalten wird, an welcher Stelle ein Index herauf- oder  
heruntergezogen wurde, weswegen keine Indizes übereinander stehen dürfen. Symme-  
trische Tensoren bilden hier eine Ausnahme, da bei ihnen die horizontale Anordnung  
der Indizes unerheblich ist.

## 2.5 Tensoroperationen

Es gibt mehrere Methoden, um aus vorhandenen Tensoren neue zu erzeugen. Da ein  
Tensor  $p$ -ter Stufe auch als ein Vektor in einem  $n^p$ -dimensionalen abstrakten Vektor-  
raum aufgefaßt werden kann, ist sowohl die Summe zweier gleichstufiger Tensoren als  
auch die Multiplikation eines Tensors mit einer Zahl ebenfalls ein Tensor. Darüberhin-  
aus gibt es die folgenden weniger trivialen Verfahren, um aus vorhandenen Tensoren  
neue zu generieren:

### 2.5.1 Tensorprodukt

Schon bei der Einführung der Tensorbasis (2.57) hatten wir über die Tensormultipli-  
kation  $\otimes$  mehrere Vektoren zu einem Tensor höherer Stufe zusammengefügt. Da dieses  
Tensorprodukt lediglich ein kartesisches Produkt darstellt, ist es ohne weiteres auf be-  
liebige Tensoren übertragbar. Betrachten wir zwei Tensoren  $\boldsymbol{x}$  ( $p$ -ter Stufe) und  $\boldsymbol{y}$

( $q$ -ter Stufe) und bilden das Tensorprodukt  $\mathbf{w}$  ( $p + q$ -ter Stufe):

$$\mathbf{x} = x^{i_1 \dots i_p} \underline{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{u}_{i_p} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{y} = y^{j_1 \dots j_q} \underline{u}_{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{u}_{j_q} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^{i_1 \dots i_p} y^{j_1 \dots j_q} \underline{u}_{i_1} \otimes \dots \otimes \underline{u}_{i_p} \otimes \underline{u}_{j_1} \otimes \dots \otimes \underline{u}_{j_q}. \quad (2.71)$$

Laut (2.71) ist  $\mathbf{w}$  eine Linearkombination von Basistensoren  $p + q$ -ter Stufe und somit selbst ein Tensor.

### 2.5.2 Überschiebung

Zwei Tensoren werden überschoben, indem in den Komponenten beider Faktoren jeweils ein Index gewählt und gleichgesetzt wird. Anschließend wird über diesen Index summiert. Technisch erinnert dieses Verfahren an das Matrixprodukt, wobei für die Überschiebung der Summationsindex eines Faktors hochgestellt und der des anderen Faktors tiefgestellt sein muß. Zur Vorbereitung ist also gegebenenfalls zunächst ein Index herauf- oder herunterzuziehen. Betrachten wir als Beispiel die beiden Tensoren

$$\mathbf{x} = x^{i_1 i_2 i_3} \underline{u}_{i_1} \otimes \underline{u}_{i_2} \otimes \underline{u}_{i_3} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{y} = y^{j_1 j_2 j_3 j_4} \underline{u}_{j_1} \otimes \underline{u}_{j_2} \otimes \underline{u}_{j_3} \otimes \underline{u}_{j_4}, \quad (2.73)$$

welche wir über die Indizes  $i_2$  und  $j_3$  überschieben wollen. Das Ergebnis dieses Prozesses lautet

$$w^{i_1 i_3 j_1 j_2 j_4} = x^{i_1 k i_3} y^{j_1 j_2}_k{}^{j_4}. \quad (2.74)$$

Zum Beweis, daß dieses Resultat wieder ein Tensor ist, betrachten wir den Basiswechsel

$$\begin{aligned} w^{i'_1 i'_3 j'_1 j'_2 j'_4} &= x^{i'_1 k' i'_3} y^{j'_1 j'_2}_{k'}{}^{j'_4} \\ &= \Lambda^{i'_1}_{i_1} \Lambda^{i'_3}_{i_3} \Lambda^{j'_1}_{j_1} \Lambda^{j'_2}_{j_2} \Lambda^{j'_4}_{j_4} \Lambda^{k'}_k \Lambda^l_{k'} x^{i_1 k i_3} y^{j_1 j_2}_l{}^{j_4} \\ &= \Lambda^{i'_1}_{i_1} \Lambda^{i'_3}_{i_3} \Lambda^{j'_1}_{j_1} \Lambda^{j'_2}_{j_2} \Lambda^{j'_4}_{j_4} \delta^l_k x^{i_1 k i_3} y^{j_1 j_2}_l{}^{j_4} \quad \Leftarrow \text{Gleichung (2.8)} \\ &= \Lambda^{i'_1}_{i_1} \Lambda^{i'_3}_{i_3} \Lambda^{j'_1}_{j_1} \Lambda^{j'_2}_{j_2} \Lambda^{j'_4}_{j_4} x^{i_1 k i_3} y^{j_1 j_2}_k{}^{j_4} \\ &= \Lambda^{i'_1}_{i_1} \Lambda^{i'_3}_{i_3} \Lambda^{j'_1}_{j_1} \Lambda^{j'_2}_{j_2} \Lambda^{j'_4}_{j_4} w^{i_1 i_3 j_1 j_2 j_4}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

aus dem sich die korrekte Transformationsformel für den Tensor  $\mathbf{w}$  ergibt. Eine Überschiebung läßt sich auch über mehrere Indexpaare durchführen.

### 2.5.3 Kontraktion

Ein Tensor wird kontrahiert, indem zwei Indizes gleichgesetzt werden und anschließend die Summe über diesen Index gebildet wird. Technisch erinnert dieses Verfahren an die Spurbildung einer Matrix, wobei für die Kontraktion ein Index hochgestellt und der andere tiefgestellt sein muß. Gegebenenfalls ist hierfür zunächst ein Index herauf- oder herunterzuziehen. Betrachten wir als Beispiel den Tensor

$$\boldsymbol{x} = x^{i_1 i_2 i_3 i_4} \underline{u}_{i_1} \otimes \underline{u}_{i_2} \otimes \underline{u}_{i_3} \otimes \underline{u}_{i_4}, \quad (2.76)$$

den wir über die Indizes  $i_1$  und  $i_3$  kontrahieren wollen. Die kontrahierten Komponenten lauten

$$x^{i_2 i_4} = x^{k i_2 i_4}_k. \quad (2.77)$$

Zum Beweis, daß das Resultat wieder ein Tensor ist, betrachten wir den Basiswechsel

$$\begin{aligned} x^{i'_2 i'_4} &= x^{k' i'_2 i'_4}_{k'} \\ &= \Lambda^{k'}_k \Lambda^l_{k'} \Lambda^{i'_2}_{i_2} \Lambda^{i'_4}_{i_4} x^{k i_2 i_4}_l \\ &= \delta^l_k \Lambda^{i'_2}_{i_2} \Lambda^{i'_4}_{i_4} x^{k i_2 i_4}_l \quad \Leftarrow \text{Gleichung (2.8)} \\ &= \Lambda^{i'_2}_{i_2} \Lambda^{i'_4}_{i_4} x^{k i_2 i_4}_k \\ &= \Lambda^{i'_2}_{i_2} \Lambda^{i'_4}_{i_4} x^{i_2 i_4}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

aus dem sich die korrekte Transformationsformel für den Tensor  $\boldsymbol{x}$  ergibt. Eine Kontraktion läßt sich auch über mehrere Indexpaare durchführen.

### 3 Allgemeine Relativitätstheorie

Für die klassische Physik ist Gravitation die Auswirkung einer Kraft in einem flachen Raum. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt stattdessen die Gravitation als kräftefreie Bewegung in einem gekrümmten Raum–Zeitkontinuum. Um zu verstehen in welcher Weise diese Theorie eine Verallgemeinerung der Speziellen Relativitätstheorie ist, untersuchen wir, wie gewisse Prinzipien der relativistischen Physik in mathematischen Forminvarianzen umgesetzt werden:

– *Das Relativitätsprinzip:*

Dieses Prinzip liegt nicht nur der Relativitätstheorie sondern auch der klassischen Mechanik zugrunde. Es besagt, daß die Wahl des **Inertialsystems** für die Aufstellung mechanischer Bewegungsgleichungen unerheblich ist und nur Auswirkungen auf die Anfangsbedingungen hat. Damit ist die mathematische Gestalt der Bewegungsgleichungen vom verwendeten Inertialsystem unabhängig oder anders ausgedrückt: Die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik sind forminvariant gegenüber Galileitransformationen.

– *Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:*

Die Verbindung dieses Prinzips mit dem Relativitätsprinzip unterscheidet die Spezielle Relativitätstheorie von der Newtonschen Mechanik. Formuliert man eine Theorie wie beispielsweise die Elektrodynamik als Beziehung zwischen Vierertensoren über dem Minkowskiraum, werden beide Prinzipien gewissermaßen automatisch erfüllt und die Theorie wird forminvariant gegenüber Lorentztransformationen.

– *Das Äquivalenzprinzip:*

Dieses Prinzip bildet die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie und wurde von Einstein den beiden obengenannten Prinzipien hinzugefügt. Es besagt sinngemäß:

**Durch Beschleunigung hervorgerufene Kräfte sind von gleichgroßen Gravitationswirkungen ununterscheidbar.**

Aufgrund dieses Prinzips kann in einem frei fallenden Koordinatensystem speziell-relativistische Physik ohne Berücksichtigung der Gravitation betrieben werden. Die aus ihm resultierende Forminvarianz betrifft die Gültigkeit allgemeinrelativistischer Gleichungen auch für krummlinige Koordinatensysteme.

Die Bezeichnung **A l l g e m e i n** steht also für die Erweiterung der Forminvarianz gegenüber Lorentztransformationen zu einer Forminvarianz gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen. Eine solche **allgemeine Kovarianz** kann auch in der

klassischen Mechanik durchaus hilfreich sein. Im Lagrangeformalismus beispielsweise sind die Lagrangefunktion  $L$  und die Euler–Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (3.1)$$

deshalb ein so mächtiges Instrument, weil sie gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen forminvariant sind. Auf diese Weise können ohne Einschränkungen diejenigen Koordinaten gewählt werden, die sich für das speziell untersuchte physikalische Problem besonders eignen. Hiervon abgesehen ist die allgemeine Kovarianz in der klassischen Mechanik zwar ein willkommenes technisches Hilfsmittel, in physikalischer Hinsicht besteht jedoch für allgemeine Kovarianz keinerlei Notwendigkeit.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Situation anders, denn diese Theorie soll ohne Einschränkung für beliebige Gravitationsfelder gültig sein. Dem Äquivalenzprinzip zufolge muß es für jedes Raum–Zeit–Ereignis ein frei fallendes Koordinatensystem geben in welchem sich „gravitationslose“ Physik betreiben läßt. Da man nicht für jeden Weltpunkt eine eigene Form der Feldgleichungen entwickeln möchte, müssen diese für alle lokal frei fallenden Koordinatensysteme dieselbe mathematische Gestalt besitzen. Dieses läßt sich nur erreichen, wenn die Theorie allgemein kovariant ist und sich die verwendeten Koordinatensysteme in jedem Raum–Zeitpunkt an beliebig strukturierte Gravitationsfelder anpassen lassen. In den folgenden Abschnitten und Kapiteln werden wir deswegen eine für krummlinige Koordinaten geeignete Tensoralgebra und –analysis vorstellen.

### 3.1 Die Koordinatenbasis

In der elementaren analytischen Geometrie werden Objekte durch das Abtasten mit der Spitze eines Ortsvektors  $\underline{x}$  beschrieben, der in einen globalen Vektorraum  $\mathbb{V}^n$  eingebettet ist und dessen Fußpunkt mit dem Nullpunkt dieses Vektorraumes zusammenfällt. Eine in diesem Ortsvektorraum eingeführte Basis ordnet dem Vektor  $\underline{x}$  ein Tupel reeller Zahlen  $\{x^j\}$  zu, welche die Position des abgetasteten Punktes im Raum beschreiben und **Koordinaten** genannt werden. Variiert man eine dieser Koordinaten und hält alle anderen auf vorgegebenen Werten fest, bewegt sich die Spitze des Ortsvektors  $\underline{x}(x^1 \cdots x^n)$  entlang einer **Koordinatenlinie**. Die Koordinatenlinien bilden  $n$  Systeme parallel verlaufender Geraden, weswegen man von einem **Parallelkoordinatensystem** spricht. Der zur Koordinate  $x^i$  gehörige Basisvektor  $\underline{u}_i$  ist zur Koordinatenlinie

$$x^j = \text{const.} \quad j \neq i \quad (3.2)$$

parallel und kann als deren Tangentialvektor aufgefaßt werden:

$$\underline{x} = x^i \underline{u}_i \tag{3.3}$$

$$\underline{u}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{x}. \tag{3.4}$$

Da einerseits die Koordinatenlinien durch die verwendeten Basisvektoren bestimmt werden und man sich umgekehrt auch die Basisvektoren über (3.4) durch die Koordinatenlinien festgelegt denken kann, spricht man von einer Koordinatenbasis. Je nach verwendeter Metrik stellen sich die Geradensysteme der Koordinatenlinien als schiefwinklig oder als senkrecht aufeinanderstehend heraus, und die Basisvektoren sind normiert oder auch nicht. Bei senkrecht aufeinanderstehenden Koordinatenlinien und normierten Basisvektoren bilden die  $x^i$  ein kartesisches Koordinatensystem.

## 3.2 Krummlinige Koordinaten

Nicht immer sind die oben beschriebenen Parallelkoordinatensysteme an das gegebene Problem gut angepaßt, und es kann durchaus wünschenswert sein, ein Koordinatensystem mit gekrümmten Koordinatenlinien zu verwenden. Liegt beispielsweise Radial- oder Kugelsymmetrie vor, wären Polar- oder Kugelkoordinaten die geeignete Wahl. Für krummlinige Koordinaten sind allerdings einige der oben erläuterten Vorstellungen nicht mehr zutreffend. Verfolgt man z.B. eine Koordinatenlinie, kann sich der Tangentialvektor von Punkt zu Punkt ändern, so daß man offensichtlich nicht mehr mit einer globalen Koordinatenbasis auskommt. Stattdessen findet man in jedem Raumpunkt eine eigene Basis vor, wodurch die Basisvektoren zu ortsabhängigen Vektorfeldern werden. Eine veränderliche Koordinatenbasis erfordert die Einführung einiger neuer Konzepte, die wir in den nächsten Abschnitten vorstellen werden.

### 3.2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Zunächst mag es so aussehen, als sei die ortsabhängige Basis ein rein technisches Problem, das nur die Durchführung einiger Rechnungen erschwert. Dieses trifft beispielsweise zu, wenn man im  $\mathbb{V}^2$  ein Polarkoordinatensystem oder im  $\mathbb{V}^3$  ein Kugelkoordinatensystem einführt. Beide sind globale Vektorräume, in denen auch Parallelkoordinatensysteme als Alternative zur Verfügung stehen. Es ist daher möglich, weiterhin mit einem Ortsvektor arbeiten, allerdings kann dieser in krummlinigen Koordinaten eine ungewohnte Gestalt annehmen. Interessiert man sich hingegen für Phänomene auf einer eindimensionalen Kreislinie oder einer zweidimensionalen Kugeloberfläche, möchte man diese unabhängig von einem Einbettungsraum beschreiben. Daher werden in der Differentialgeometrie Raumpunkte nicht mehr durch einen Ortsvektor sondern

allein durch die Koordinaten  $x^i$  beschrieben, die somit ihren Status als Vektorkomponenten verlieren. Verschiedene Koordinatensysteme lassen sich über die funktionalen Abhängigkeiten

$$x^{j'} = x^{j'}(x^1 \cdots x^n) \quad (3.5)$$

ineinander umrechnen, wobei vorausgesetzt wird, daß sich diese Funktionen umkehren lassen und daß sowohl sie selbst als auch die Umkehrfunktionen genügend oft differenzierbar sind. Aus diesem Grund nennt man den Koordinatenwechsel (3.5) einen **Diffeomorphismus** und die Menge aller Ortspunkte heißt nicht mehr **Vektorraum** sondern **Differenzierbare Mannigfaltigkeit**. In demselben Jargon werden die  $x^i$  als **Karte** bezeichnet, allerdings werden wir weiterhin den Begriff **Koordinatensystem** verwenden.

### 3.2.2 Tangentialvektorräume

Mit dem Wegfall des globalen Ortsvektorraumes  $\mathbb{V}^n$  benötigen wir eine neue Plattform, in welcher Vektoren und Tensoren dargestellt werden können. Das gilt auch für die Tangentialvektoren an Koordinatenlinien, die im Falle eines Parallelkoordinatensystems globale Gültigkeit besitzen und die sich bei krummlinigen Koordinaten von Raumpunkt zu Raumpunkt ändern. Dieser Übergang von einer globalen zu einer Vielzahl lokaler Strukturen führt dazu, daß der globale Ortsvektorraum durch unendlich viele Tangentialvektorräume ersetzt werden muß, die jeweils einem einzelnen Raumpunkt  $P$  zugeordnet sind:

$$\mathbb{V}^n \Rightarrow \mathbb{V}_{(P)}^n. \quad (3.6)$$

Die in dem Punkt  $P$  vorhandenen Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien bilden eine Basis für den dort angehefteten Vektorraum  $\mathbb{V}_{(P)}^n$ . Diese vielfachen Tangentialvektorräume führen zu einer eigentümlichen Schwierigkeit. Zwar können Vektoren im gleichen Raumpunkt  $P$  wie gewohnt addiert und subtrahiert werden, es ist jedoch nicht erlaubt, Additionen oder Subtraktionen von Vektoren in verschiedenen Raumpunkten durchzuführen. Dieses ist erst nach Einführung einer zusätzlichen Struktur möglich, die als **Zusammenhang** bezeichnet wird.

Der Zusammenschluß mehrerer Instanzen des lokalen Tangentialvektorraumes zu einem Tensorraum geschieht getrennt in jedem Raumpunkt durch kartesische Produktbildung. Auf diese Weise überträgt sich das Problem der Vergleichbarkeit von Vektoren in verschiedenen Raumpunkten auch auf Tensoren höherer Stufe.

### 3.2.3 Kotangentialräume

Den Übergang von einer globalen zu unendlich vielen lokalen Strukturen müssen wir auch für Linearformen durchführen, da diese einen Vektor als Argument haben und somit ebenfalls lokal in einem Raumpunkt  $P$  zum Einsatz kommen. An jeden Punkt  $P$  wird also nicht nur ein Vektorraum  $\mathbb{V}_{(P)}^n$  sondern auch ein dualer Raum  $\mathbb{V}_{(P)}^{*n}$  angeheftet, und wir können den zum Ortsvektorraum analogen Zerfall des globalen Dualraumes in eine Vielzahl lokaler Instanzen beobachten:

$$\mathbb{V}^{*n} \Rightarrow \mathbb{V}_{(P)}^{*n}. \quad (3.7)$$

Diese Dualräume werden als **Kotangentialräume** bezeichnet. Wie bei Vektoren beschränkt sich die Vergleichbarkeit von Linearformen auf den lokalen Dualraum in  $P$  und kann nicht auf Linearformen in verschiedenen Kotangentialräumen übertragen werden. Falls neben den Tangential- und Kotangentialräumen eine Metrik zur Verfügung steht, können  $\mathbb{V}_{(P)}^n$  und  $\mathbb{V}_{(P)}^{*n}$  wie in Abschnitt 2.3.4 beschrieben miteinander identifiziert werden. Die Metrik ist ebenfalls ortsabhängig, denn sie wird über dem Tangentialvektorraum jedes Punktes separat definiert.

## 3.3 Wechsel des Koordinatensystems

In Abschnitt 3.2.1 hatten wir bereits erwähnt, daß mit der Einführung Differenzierbarer Mannigfaltigkeiten und dem damit verbundenen Wegfall des Ortsvektorraumes der Basiswechsel (2.3) durch den Diffeomorphismus

$$x^{j'} = x^{j'}(x^1 \cdots x^n) \quad (3.8)$$

ersetzt wird. Wir wenden uns nun der Frage zu, auf welche Weise dieser Diffeomorphismus in den verschiedenen Tangential- und Kotangentialräumen  $\mathbb{V}_{(P)}^n$  und  $\mathbb{V}_{(P)}^{*n}$  den Wechsel der lokalen Basis bestimmt, den wir für die Umrechnung von Vektor- und Linearformkomponenten in diesen Räumen benötigen. Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist die schon bekannte Transformation von Parallelkoordinatensystemen mit Hilfe der Basiswechsellmatrix  $\underline{\underline{\Lambda}}$  und ihres Inversen:

$$x^{j'} = \Lambda^{j'}_i x^i \quad (3.9)$$

$$x^i = \Lambda_{j'}^i x^{j'}. \quad (3.10)$$

Wir interpretieren die obenstehenden Gleichungen als Spezialfall eines Diffeomorphismus' mit Geraden als Koordinatenlinien. Auch wenn die Transformation der Vektorkomponenten hier im Tangentialvektorraum des Koordinatenursprungs stattfindet, erlaubt

einem ein Parallelkoordinatensystem, sich eine Kopie dieses Vektorraumes an jeden Raumpunkt angeheftet zu denken. Mit Hilfe von (3.9) und (3.10) lassen sich die Komponenten der Basiswechsellmatrizen durch partielle Differentiation berechnen:

$$\Lambda^{j'}{}_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{j'}{}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}. \quad (3.12)$$

Die Bildung der partiellen Ableitungen kann auch im Fall des allgemeinen Diffeomorphismus (3.8) durchgeführt werden, wobei diesmal die so generierten Basiswechsellmatrizen vom betrachteten Raumpunkt  $P$  abhängig sind:

$$\Lambda^{j'}{}_i(P) := \left. \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right|_P \quad (3.13)$$

$$\Lambda_{j'}{}^i(P) := \left. \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right|_P. \quad (3.14)$$

Damit steht fest, daß die durch den Diffeomorphismus erzeugten Transformationsmatrizen für Vektor- bzw. Linearformkomponenten die Funktional- bzw. Jacobimatrizen der betreffenden Koordinatentransformation sind. Die bei einem Diffeomorphismus implizit angenommenen Voraussetzungen garantieren die Umkehrbarkeit dieser Transformation und somit die Existenz von (3.14). Analog zu Basiswechsellmatrizen ist (3.14) die inverse Matrix von (3.13):

$$\left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right] = \left[ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

## 3.4 Beispiele

An dieser Stelle möchten wir Koordinatentransformationen und die Metrik über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit an zwei geläufigen Beispielen demonstrieren:

### 3.4.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes durch den Abstand  $r$  zum Koordinatenursprung und den Winkel  $\varphi$  zur positiven  $x$ -Achse. Im Folgenden sind  $x^{i'} = \{x, y\}$

die kartesischen und  $x^i = \{r, \varphi\}$  die Polarkoordinaten. Die Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Daraus lassen sich vier partielle Ableitungen berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos(\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin(\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin(\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos(\varphi), \end{aligned} \tag{3.17}$$

welche als Matrix zusammengefaßt die Transformationsmatrix für kontravariante Vektorkomponenten ergeben:

$$\left[ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Die umgekehrte Transformation (Kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten) lautet:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Die ganze Zahl  $n$  ist je nach Quadrant geeignet zu wählen, für die zu bildenden partiellen Ableitungen spielt sie jedoch keine Rolle. Diese lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

und können zur Transformationsmatrix für kovariante Vektorkomponenten zusammengefaßt werden:

$$\left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Die hier erfolgte Umrechnung der Matrixkomponenten in Polarkoordinaten ist für die Transformation kovarianter Vektorkomponenten nützlich und erleichtert außerdem die Überprüfung, daß (3.21) tatsächlich die inverse Matrix zu (3.18) ist:

$$\left[ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right] \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \mathbb{1}. \quad (3.22)$$

Mit (3.18) lassen sich auch die Komponenten des Metrischen Tensors transformieren. In kartesischen Koordinaten ist  $(g_{i'j'}) = \mathbb{1}$ , und uns interessiert

$$\begin{aligned} [g_{ij}] &= \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} g_{i'j'} \right] = \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right]^T \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Diese Matrix läßt sich leicht invertieren, so daß wir auch die Komponenten des inversen Metrischen Tensors kennen:

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Mit (3.23) und (3.24) sind wir in der Lage, Indizes im Polarkoordinatensystem herauf- und herunterzuziehen.

### 3.4.2 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten beschreiben die Lage eines Punktes durch den Abstand  $r$  zum Koordinatenursprung, den Winkel  $\varphi$  zur positiven  $x$ -Achse um die  $z$ -Achse und den Winkel  $\vartheta$  zur positiven  $z$ -Achse des kartesischen Koordinatensystems. Im Folgenden sind  $x^{i'} = \{x, y, z\}$  die kartesischen und  $x^i = \{r, \varphi, \vartheta\}$  die Kugelkoordinaten. Die Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ y &= r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ z &= r \cos(\vartheta). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Daraus lassen sich neun partielle Ableitungen berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} &= r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\
\frac{\partial z}{\partial r} &= \cos(\vartheta) & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= 0 & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} &= -r \sin(\vartheta),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

welche als Matrix zusammengefaßt die Transformationsmatrix für kontravariante Vektorkomponenten ergeben:

$$\left[ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Die umgekehrte Transformation (Kartesische Koordinaten in Kugelkoordinaten) lautet:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + n\pi & n &\in \mathbb{Z} \\
\vartheta &= \arctan\left(\frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2}\right) + m\pi & m &\in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Die ganzen Zahlen  $m$  und  $n$  sind je nach Raumbereich geeignet zu wählen, für die zu bildenden partiellen Ableitungen spielen sie jedoch keine Rolle. Diese lauten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 & \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

und können zur Transformationsmatrix für kovariante Vektorkomponenten zusammengefaßt werden:

$$\left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) / \sin(\vartheta) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) / \sin(\vartheta) & 0 \\ \frac{1}{r} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -\frac{1}{r} \sin(\vartheta) \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Die hier erfolgte Umrechnung der Matrixkomponenten in Kugelkoordinaten ist für die Transformation kovarianter Vektorkomponenten nützlich und erleichtert außerdem die Überprüfung, daß (3.30) tatsächlich die inverse Matrix zu (3.27) ist:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \right] \left[ \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \right] = \\
& = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \cdots \\
& \cdots \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \\ -\frac{1}{r} \sin(\varphi) / \sin(\vartheta) & \frac{1}{r} \cos(\varphi) / \sin(\vartheta) & 0 \\ \frac{1}{r} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & \frac{1}{r} \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -\frac{1}{r} \sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \mathbb{1}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Mit (3.27) lassen sich auch die Komponenten des Metrischen Tensors transformieren. In kartesischen Koordinaten ist  $(g_{i'j'}) = \mathbb{1}$ , und uns interessiert

$$\begin{aligned}
[g_{ij}] &= \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} g_{i'j'} \right] = \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right]^T \left[ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \\ -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & 0 \\ r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \cdots \\
& \cdots \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Diese Matrix läßt sich leicht invertieren, so daß wir auch die Komponenten des inversen Metrischen Tensors kennen:

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Mit (3.32) und (3.33) sind wir in der Lage, Indizes im Kugelkoordinatensystem herauf- und herunterzuziehen.

## 4 Die kovariante Ableitung

Bei der Analyse der Eigenschaften von Vektor- bzw. Tensorfeldern ist es von besonderem Interesse, deren Änderung entlang von Kurven zu verfolgen. Informationen dieser Art fließen in Gleichungen ein, welche die Felder mit Hilfe von Differentialoperationen beschreiben und **Feldgleichungen** genannt werden. Die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik oder die Newton'schen Gleichungen der mechanischen Bewegung enthalten partielle Differentiationen bezüglich der Ortsvariablen und der Zeit und gelten in ihrer Standardform für kartesische Koordinaten. Sobald beschleunigte oder krummlinige Koordinaten ins Spiel kommen entstehen Sondereffekte, die in der Mechanik durch sogenannte Scheinkräfte zu berücksichtigen sind, und in jedem Fall muß man sich spezielle Formen der Differentialoperatoren grad, div und rot verschaffen. Für die obengenannten zwei klassischen Feldtheorien bilden Raum und Zeit nur eine Art Bühne für die zu untersuchenden Phänomene. Die Allgemeine Relativitätstheorie hingegen trifft Aussagen über die gekrümmte Struktur des Raum- Zeitkontinuums selbst, wodurch die Verwendung geeigneter mathematischer Strukturen von vornherein unumgänglich ist.

### 4.1 Die mitbewegte Basis

Wir wollen die Änderung eines Vektorfeldes  $\underline{v}$  entlang einer Kurve in einem Raum untersuchen, dessen Punkte  $P$  durch die Koordinaten  $\{x^1 \cdots x^n\}$  parametrisiert werden. Nach Einführung des Kurvenparameters  $\lambda$  lautet diese Kurve

$$P(\lambda) = \{x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)\}. \quad (4.1)$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir ab jetzt Ableitungen nach dem Kurvenparameter mit einem Punkt. Leiten wir nun das Vektorfeld  $\underline{v}$  nach  $\lambda$  ab, erhalten wir:

$$\dot{\underline{v}} := \frac{d}{d\lambda} \underline{v}(x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{v}. \quad (4.2)$$

Die Terme  $\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{v}$  werden in der lokalen Basis  $\underline{u}_i$  entwickelt:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{v} =: v^k{}_{|i} \underline{u}_k. \quad (4.3)$$

Die Komponente  $v^k{}_{|i}$  ist ein Maß für die differentielle Änderung des Vektors  $\underline{v}$  entlang der Koordinate  $x^i$  und wird die **kovariante Ableitung der Vektorkomponente  $v^k$**

nach  $\mathbf{x}^i$  genannt. Zur Berechnung von  $v^k|_i$  betrachten wir die linke Seite von (4.3) und entwickeln auch  $\underline{v}$  in der lokalen Basis  $\underline{u}_j$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{v} = \frac{\partial}{\partial x^i} (v^j \underline{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x^i} v^j \underline{u}_j + v^j \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j. \quad (4.4)$$

In einem Parallelkoordinatensystem verschwindet der Term  $\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j$ , und die partielle Ableitung des Vektors  $\underline{v}$  reduziert sich wie gewohnt auf die partielle Ableitung seiner Komponenten. Da die Basisvektoren Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien sind, verändern sich in einem krummlinigen Koordinatensystem bei der Verfolgung einer Koordinatenlinie gegebenenfalls deren Richtung und Länge. Wir müssen daher davon ausgehen, daß der Term  $\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j$  nicht verschwindet und stellen auch diesen als Entwicklung in der lokalen Basis dar:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j = \Gamma_{ij}^k \underline{u}_k. \quad (4.5)$$

Die Zahlen  $\Gamma_{ij}^k$  heißen **Christoffelsymbole zweiter Art** und unterscheiden sich von den **Christoffelsymbolen erster Art** durch die Hochstellung des Index  $k$ :

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ij,l}. \quad (4.6)$$

Die  $\Gamma_{ij}^k$  sind ein Ausdruck für die Krümmung der Koordinatenlinien, die verschiedene Ursachen haben kann: Einerseits können die krummlinigen Koordinaten willkürlich in einem Raum gewählt sein, der auch Parallelkoordinatensysteme zuläßt (z.B. Polar- oder Kugelkoordinaten im zwei- bzw. dreidimensionalen Euklidischen Raum). Andererseits kann aber auch der Raum selbst die Wahl krummliniger Koordinatensysteme erzwingen wie im Fall der Kugeloberfläche. Setzen wir Gleichung (4.5) in (4.4) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{v} =: \frac{\partial}{\partial x^i} v^j \underline{u}_j + v^j \Gamma_{ij}^k \underline{u}_k. \quad (4.7)$$

Durch den Vergleich von (4.7) und (4.3) können wir die kovariante Ableitung durch die Christoffelsymbole ausdrücken:

$$v^k|_i = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k + \Gamma_{ij}^k v^j. \quad (4.8)$$

## 4.2 Paralleltransport und geodätische Kurven

Die Aufsplitterung des Ortsvektorraumes in eine Vielzahl von Tangentialvektorräumen verhindert den direkten Vergleich von Vektoren an verschiedenen Punkten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Von diesem Problem ist insbesondere die kovariante Ableitung betroffen, in der ein sinnvolles Konzept für einen Differentialquotienten bzw. die Differenz zweier Vektoren gesucht wird, die sich an zwei durch ein differentielles Kurvenstück getrennten Punkten der Mannigfaltigkeit befinden. Da Differenzen nur von Vektoren des gleichen Tangentialvektorraumes gebildet werden können, benötigen wir ein Verfahren, das uns erlaubt, einen der Vektoren in den Tangentialvektorraum des Partners einzublenden. Im Jahr 1917 veröffentlichte Tullio Levi Civita die Idee des **Paralleltransportes**, durch welchen sich Vektoren in benachbarte Tangentialvektorräume verschieben lassen. Da auf diese Weise die Elemente verschiedener Tangentialvektorräume miteinander verbunden werden, spricht man auch von einem **Zusammenhang**.

### 4.2.1 Die Parallelverschiebung

Den Transport eines Vektors  $\underline{v}$  von einem Tangentialvektorraum in einen anderen bezeichnet man als Parallelverschiebung, wenn der Vektor während dieses Vorgangs möglichst unverändert bleibt. Beschränkt man sich hierbei auf differentiell kleine Verschiebungen, ist das Maß für die Veränderung des transportierten Vektors dessen kovariante Ableitung entlang des differentiellen Kurvenstückes

$$dx^i(\lambda) = \frac{dx^i}{d\lambda} d\lambda =: \dot{x}^i d\lambda. \quad (4.9)$$

Wieder haben wir den Kurvenparameter  $\lambda$  genannt und die Ableitung nach dem Kurvenparameter mit einem Punkt gekennzeichnet. In diesem Abschnitt interpretieren wir die  $\Gamma_{ij}^k$  als **Zusammenhangskoeffizienten** und gehen davon aus, daß wir diese bereits kennen und daß die kovariante Ableitung (4.8) somit festgelegt ist. Allerdings werden wir die  $\Gamma_{ij}^k$  später mit Hilfe der Metrik berechnen und dann wieder als Christoffelsymbole bezeichnen. Um partielle Ableitungen des Vektors  $\underline{v}$  entlang der Koordinatenlinien bilden zu können, stellen wir uns den Verlauf des Transportes in ein Vektorfeld  $\underline{v}(x^i)$  eingebettet vor. Wir wollen die Bedingungen festlegen, welche die im Vektorfeld gespeicherte Transporthistorie zur Historie eines Paralleltransportes werden läßt. Die kovariante Ableitung  $v^k_{|\lambda}$  dieses Vektorfeldes entlang der Kurve  $x^i(\lambda)$  wird folgendermaßen aus der kovarianten Ableitung  $v^k_{|i}$  der Komponenten dieses Vektorfeldes entlang der Koordinatenlinien berechnet:

$$v^k_{|\lambda} := v^k_{|i} \dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k \dot{x}^i + \Gamma_{ij}^k v^j \dot{x}^i. \quad (4.10)$$

Gelegentlich wird (4.10) auch als die **absolute Ableitung** des Vektorfeldes  $\underline{v}$  bezeichnet, was heutzutage allerdings als veraltet gilt. Wir verwenden Gleichung (4.10), um die differentielle Änderung  $dv^k$  der Komponenten des Vektorfeldes  $\underline{v}$  entlang des Kurvenstückes  $dx^i$  darzustellen:

$$dv^k = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k dx^i + \Gamma_{ij}^k v^j dx^i. \quad (4.11)$$

Wenn wir fordern, daß sich der Vektor  $\underline{v}$  mit  $dv^k = 0$  nicht verändern soll, beschreibt Gleichung (4.11) die Bedingung für eine Parallelverschiebung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v^k = -\Gamma_{ij}^k v^j. \quad (4.12)$$

Diese Bedingung besagt insbesondere, daß die kovariante Ableitung von  $\underline{v}$  verschwindet. Als nächstes fassen wir die partielle Ableitung als Differentialquotienten auf

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v^k = \lim_{dx^i \rightarrow 0} \frac{v'^k - v^k}{dx^i}, \quad (4.13)$$

in welchem  $v^k$  und  $v'^k$  die Vektorkomponenten vor und nach der Parallelverschiebung sind:

$$\begin{aligned} v^k &= v^k(x^i) \\ v'^k &= v^k(x^i + dx^i). \end{aligned}$$

Wir setzen den Ausdruck (4.13) in (4.12) ein und erhalten

$$v'^k = v^k - \Gamma_{ij}^k v^j dx^i. \quad (4.14)$$

In einem flachen Raum lassen sich Parallelkoordinatensysteme einführen, in denen die Verbindungskoeffizienten verschwinden und der Vektor  $\underline{v}$  seine Komponenten bei einer Parallelverschiebung mit  $v'^k = v^k$  einfach beibehält. In einem krummlinigen Koordinatensystem können die Basisvektoren jedoch während der Verschiebung Betrag und Richtung ändern, was durch eine Anpassung der Vektorkomponenten  $v'^k$  gemäß (4.14) kompensiert werden muß.

### 4.2.2 Die Geodätengleichung

Eine Möglichkeit zur Definition geodätischer Kurven ist die Suche nach einem Pfad, der so gerade verlaufen soll, wie es in der umgebenden Mannigfaltigkeit möglich ist. Der Pfad muß also überall die Eigenschaft besitzen, daß sein Tangentialvektor während einer Verschiebung entlang des Pfades die Richtung beibehält. Wir können diese Forderung noch dahingehend erweitern, daß nicht nur die Richtung, sondern auch die Länge des Tangentialvektors während der Verschiebung erhalten bleiben soll. Diese Zusatzforderung schließt keine Pfade aus sondern schränkt nur die Wahl des Kurvenparameters ein. In dieser Definition entspricht die Geodäte einer Kurve  $x^i(\lambda)$ , deren Tangentialvektor  $\underline{v}_T(\lambda)$  mit den Komponenten

$$v_T^k := \frac{dx^k}{d\lambda} = \dot{x}^k \quad (4.15)$$

während des Kurvenverlaufs parallelverschoben wird und die Bedingung (4.12) erfüllen muß. Diese Bedingung ist nur anwendbar, wenn wir uns die Transporthistorie wieder in ein Vektorfeld  $\underline{v}_T(x^i)$  eingebettet vorstellen:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v_T^k = -\Gamma_{ij}^k v_T^j. \quad (4.16)$$

Multiplikation und Summation dieser Gleichung mit  $\dot{x}^i$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v_T^k \dot{x}^i = \dot{v}_T^k = -\Gamma_{ij}^k v_T^j \dot{x}^i. \quad (4.17)$$

Verwenden wir die Definition (4.15) des Tangentialvektors, erhalten wir ein System von Differentialgleichungen für geodätische Kurven:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^j \dot{x}^i = 0. \quad (4.18)$$

Später wird sich zeigen, daß die geläufigere Definition einer Geodäten als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ebenfalls zu Gleichung (4.18) führt, allerdings muß hierfür die Verknüpfung zwischen den Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma_{ij}^k$  und der Metrik  $g_{ij}$  bekannt sein.

### 4.3 Christoffelsymbole

In diesem Abschnitt werden wir die Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma_{ij}^k$  mit Hilfe der über der Tangentialvektorbasis  $\{\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_n\}$  definierten Metrik

$$g_{ij} = (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j) \quad (4.19)$$

berechnen. Die  $\Gamma_{ij}^k$  sind gemäß Gleichung (4.5) durch Ableitungen der  $\underline{u}_i$  festgelegt und beschreiben eine Verknüpfung zwischen Basisvektoren in differentiell benachbarten Raumpunkten. Die Darstellung der  $\Gamma_{ij}^k$  als Funktion der Metrik trägt den Namen **Levy Civita Zusammenhang** und die Zusammenhangskoeffizienten selbst werden als Christoffelsymbole bezeichnet.

#### 4.3.1 Darstellung durch die Metrik

Die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j$  ist ein Ausdruck für differentielle Längen- und Winkeländerungen, die der Basisvektor  $\underline{u}_j$  im Verlauf der Koordinatenlinie  $x^i$  erfährt. Wie Längen und Winkel selbst lassen sich auch die Zusammenhangskoeffizienten  $\Gamma_{ij}^k$  als Funktionen der Komponenten  $g_{ij}$  des Metrischen Tensors ausdrücken. In der folgenden Herleitung werden wir eine Symmetrie der Christoffelsymbole ausnutzen, die wir hier kurz erläutern wollen. Man erkennt diese Symmetrie, wenn die Tangentialvektoren wie in (3.4) als Ableitungen eines Ortsvektors  $\underline{x}$  dargestellt werden:

$$\underline{u}_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \underline{x}. \quad (4.20)$$

Ist der Raum gekrümmt und die Konstruktion eines Ortsvektors nicht möglich, muß stattdessen die Einbettung in einen höherdimensionalen Raum betrachtet werden, in dem Parallelkoordinatensysteme existieren. In dieser Darstellung schreibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \underline{x}, \quad (4.21)$$

und es gilt

$$\Gamma_{ij}^k \underline{u}_k = \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_j = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \underline{x} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \underline{x} = \frac{\partial}{\partial x^j} \underline{u}_i = \Gamma_{ji}^k \underline{u}_k, \quad (4.22)$$

wobei im Mittelteil der Gleichungskette die zweifachen partiellen Ableitungen nach  $x^i$  und  $x^j$  vertauscht wurden. Da die  $\underline{u}_k$  linear unabhängig sind, kann man aus (4.22)

schließen, daß die Christoffelsymbole zweiter Art (und somit auch diejenigen erster Art) in den Indizes  $i$  und  $j$  symmetrisch sind:

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \quad (4.23)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k . \quad (4.24)$$

Wir betrachten nun die partiellen Ableitungen des metrischen Tensors

$$g_{ij} = (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j) . \quad (4.25)$$

Sowohl die  $g_{ij}$  als auch die Basisvektoren  $\underline{u}_i$  und  $\underline{u}_j$  sind Funktionen der Koordinaten  $x^i$ , so daß wir schreiben können:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} &= \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \underline{u}_i \cdot \underline{u}_j \right) + \left( \underline{u}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \underline{u}_j \right) \\ &= \Gamma_{ki}^l (\underline{u}_l \cdot \underline{u}_j) + \Gamma_{kj}^l (\underline{u}_i \cdot \underline{u}_l) \\ &= \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i} . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Wir verwenden diese Gleichung in drei Versionen mit zyklisch vertauschten Indizes, wobei wir die Symmetrie einiger Indexgruppen ausnutzen:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{ik,j} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} = \Gamma_{jk,i} + \Gamma_{ij,k} . \quad (4.29)$$

Durch eine geeignete Kombination dieser drei Gleichungen wird  $\Gamma_{ij,k}$  isoliert:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = 2\Gamma_{ij,k} . \quad (4.30)$$

Diese Beziehung erlaubt die Berechnung der Christoffelsymbole aus der Metrik:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) \quad (4.31)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) . \quad (4.32)$$

Beide Gleichungen sind der gesuchte Levy Civita Zusammenhang.

### 4.3.2 Eigenschaften

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Fakten bezüglich der Christoffelsymbole erster und zweiter Art zusammenstellen:

– *Symmetrie*

Bei der Berechnung der Christoffelsymbole aus den Komponenten  $g_{ij}$  des metrischen Tensors hatten wir bereits die folgende Symmetrie ausgenutzt:

$$\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k} \quad (4.33)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k . \quad (4.34)$$

Die Ursache dieser Symmetrie war die Vertauschbarkeit der zweifachen partiellen Ableitung des Ortsvektors nach den Koordinaten. Ein Raum mit dieser Eigenschaft heißt **torsionsfrei**. In der Allgemeinen Relativitätstheorie besitzt der Raum diese Eigenschaft, allerdings werden in einigen Erweiterungen dieser Theorie auch Räume mit Torsion diskutiert.

– *Tensoreigenschaften*

Eine überraschende Eigenschaft der Christoffelsymbole ist die Tatsache, daß es sich nicht um Tensorcomponenten handelt. Der Grund hierfür sind die Bestandteile der Gestalt  $\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}$ , die sich bei einem Koordinatenwechsel folgendermaßen transformieren:

$$\frac{\partial}{\partial x^{k'}} g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij} \right) . \quad (4.35)$$

Man erkennt, daß die Differentiation  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  nicht nur auf die  $g_{ij}$ , sondern auch auf die Komponenten  $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$  und  $\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$  wirkt, wodurch zweifache partielle Ableitungen generiert werden. Diese Terme verschwinden auch bei der späteren Aufsummation nicht. Für den Tensorcharakter der kovarianten Ableitung sind sie sogar unverzichtbar, da sie sich dort mit anderen zweifachen partiellen Ableitungen wegheben.

### 4.3.3 Berechnung aus einer Lagrangefunktion

Der Levy Civita Zusammenhang ermöglicht bei vorgegebener Metrik die Berechnung der Christoffelsymbole erster und zweiter Art. Natürlich lassen sich die Gleichungen (4.31) und (4.32) direkt verwenden, allerdings ist diese Methode unter Umständen recht

impraktikabel. Nach Abzug der durch die Symmetrie verursachten Redundanz bleiben  $\frac{1}{2}n^2(n+1)$  wesentliche Koeffizienten übrig, die nicht selten nach fleißiger Berechnung verschwinden.

Dank dem auf dem Hamiltonschen Prinzip beruhenden Lagrangeformalismus kommt man bei der Verwendung krummliniger Koordinaten mit Christoffelsymbolen selten in Berührung. Dieser Formalismus ist für beliebige Koordinatensysteme gültig und erlaubt beispielsweise in der Mechanik, das Koordinatensystem an willkürlich geformte Zwangsflächen anzupassen und dennoch in diesen Koordinaten gültige Bewegungsgleichungen zu generieren. Wir werden den Lagrangeformalismus benutzen, um die Christoffelsymbole auf deutlich einfachere Weise als über den Levy Civita Zusammenhang zu berechnen. Ohne den Einfluß äußerer Kräfte bewegen sich Masseteilchen auf geodätischen Bahnen oder in einem Euklidischen Raum auf Geraden. Daher betrachten wir zur Berechnung der Bewegungsgleichungen geodätischer Bahnkurven die Lagrangefunktion eines freien Teilchens mit der Masse  $m = 2$  in einem  $n$ -dimensionalen Raum:

$$L_p(\dot{x}^1 \cdots \dot{x}^n, x^1 \cdots x^n, t) = \underline{\dot{x}}^2 = g_{ij}(x^1 \cdots x^n) \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (4.36)$$

der Punkt beschreibt in diesem Fall die Ableitung nach der Zeit  $t$ . Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^l} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x^l} = 0 \quad (4.37)$$

für die Lagrangefunktion (4.36) lauten:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^l} = 2 g_{lj} \dot{x}^j \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^l} \right) = 2 g_{lj} \ddot{x}^j + 2 \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (4.40)$$

In Gleichung (4.40) spalten wir den Faktor 2 künstlich auf und benennen die Summationsindizes um:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^l} \right) = 2 g_{lj} \ddot{x}^j + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} \dot{x}^i \dot{x}^j + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} \dot{x}^i \dot{x}^j. \quad (4.41)$$

Fassen wir die Gleichungen (4.41) und (4.39) zu den Euler–Lagrangeschen Gleichungen

zusammen, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^l} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x^l} &= 2 g_{lj} \ddot{x}^j + \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Durch Überschiebung von links mit dem inversen Metrischen Tensor  $g^{kl}$  erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}^k + \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (4.43)$$

oder nach dem Umschreiben in Christoffelsymbole zweiter Art

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (4.44)$$

Der Vorteil dieser Methode ist, daß sämtliche Christoffelsymbole nach der Aufstellung der Gleichungen (4.44) identifiziert werden können, ohne daß die verschwindenden  $\Gamma_{ij}^k$  berechnet werden müssen.

#### 4.3.4 Geodätische Kurven

Die Definition einer Geodäten als kürzestmögliche Verbindung zweier Punkte ist etwas geläufiger als das in Abschnitt 4.2.2 diskutierte Konzept eines Pfades, der seinen eigenen Tangentialvektor paralleltransportiert. Der Vergleich der Bogenlänge verschiedener Testkurven erfordert die Vorgabe einer Metrik  $g_{ij}$ , mit deren Hilfe Linienelemente entlang dieser Kurven formuliert werden können. Nach Einführung eines beliebigen Kurvenparameters  $\lambda$  hat ein solcher Pfad die Gestalt

$$x^i = x^i(\lambda), \quad (4.45)$$

und die Komponenten seines Tangentialvektors lauten

$$x'^i = \frac{d}{d\lambda} x^i(\lambda). \quad (4.46)$$

Diesmal haben wir die Ableitung nach dem Kurvenparameter mit einem Strich gekennzeichnet. Der Tangentialvektor entspricht einem differentiellen Streckenstück  $d\underline{s}$  mit den Komponenten

$$ds^i = x'^i d\lambda. \quad (4.47)$$

Durch das Quadrat dieses Streckenstückes wird das **Linielement** entlang der Kurve definiert:

$$ds^2 := (d\underline{s} \cdot d\underline{s}) = g_{ij} x'^i x'^j d\lambda^2. \quad (4.48)$$

Mit Hilfe dieses Linielementes läßt sich die Länge  $\ell$  der Kurve innerhalb des Parameterbereiches  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$  durch Integration ermitteln:

$$\ell = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ds = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} d\lambda. \quad (4.49)$$

Sucht man zwischen diesen Grenzpunkten den Pfad minimaler Bogenlänge, wird aus dem obenstehenden Ausdruck (4.49) ein Integralprinzip, das durch Variation des Pfades  $x^i(\lambda)$  zu extremalisieren ist. Da alle Testpfade den gleichen Anfangspunkt  $x^i(\lambda_0)$  und denselben Endpunkt  $x^i(\lambda_1)$  besitzen, werden die beiden Randpunkte bei der Variation festgehalten. Die Kurve minimaler Länge wird somit durch die Euler–Lagrangeschen Gleichungen der Lagrangefunktion

$$L_g(x'^1 \dots x'^n, x^1 \dots x^n) = \sqrt{g_{ij}(x^1 \dots x^n) x'^i x'^j} \quad (4.50)$$

festgelegt. Der Vergleich mit dem letzten Abschnitt zeigt, daß es sich bei dem Term unter der Wurzel um die Lagrangefunktion  $L_p$  des freien Teilchens handelt:

$$L_g = \sqrt{L_p}. \quad (4.51)$$

Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen lauten

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L_g}{\partial x'^k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial x^k} = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{2\sqrt{L_p}} \frac{\partial L_p}{\partial x'^k} \right) - \frac{1}{2\sqrt{L_p}} \frac{\partial L_p}{\partial x^k} = 0, \quad (4.53)$$

wobei in der zweiten Form (4.53) die Beziehung (4.51) verwendet wurde. Bisher haben wir beliebige Parametrisierungen der Pfade zugelassen mit dem unschönen Nebeneffekt, daß auf diese Weise ganze Klassen unendlich vieler Kurven entstehen, die einfache Umparametrisierungen eines einzigen Pfades sind. Diese Mehrdeutigkeit der Darstellung

beschränken wir durch die Wahl **affiner** Parameter  $\tau$ , die sich von der mitlaufenden Bogenlänge  $\ell(\lambda)$  nur durch eine lineare Transformation

$$\tau = a\ell + b \quad (4.54)$$

mit konstantem  $a$  und  $b$  unterscheiden. In dieser affinen Parametrisierung lautet die Bogenlänge

$$\ell(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} d\tau' = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{L_p(\tau')} d\tau', \quad (4.55)$$

wobei wir diesmal in den Komponenten des Tangentialvektors die Ableitung nach dem affinen Parameter mit einem Punkt gekennzeichnet haben:

$$\dot{x}^i = \frac{d}{d\tau} x^i(\tau). \quad (4.56)$$

Differentiation der Gleichung (4.54) nach  $\tau$  liefert uns die Beziehung

$$1 = a \frac{d}{d\tau} \ell(\tau) = a \sqrt{L_p(\tau)}, \quad (4.57)$$

womit wir die Lagrangefunktion schreiben können:

$$L_g(\tau) = \sqrt{L_p(\tau)} = \frac{1}{a}. \quad (4.58)$$

Als Folge der Parametrisierung der Bogenlänge durch sich selbst verhalten sich  $L_g$  und  $L_p$  als Funktion des affinen Parameters  $\tau$  entlang der Kurve wie Konstanten. In ihrer Eigenschaft als Lagrangefunktion hängen sie jedoch nach wie vor von den Koordinaten  $x^i(\tau)$  und  $\dot{x}^i(\tau)$  ab. Setzen wir (4.58) in (4.53) ein, kann der konstante Faktor  $a/2$  ausgeklammert werden und wir erhalten

$$\frac{a}{2} \left[ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x^k} \right] = 0. \quad (4.59)$$

Damit haben wir die Euler–Lagrangeschen Gleichungen für geodätische Kurven auf die aus dem letzten Abschnitt bekannten Gleichungen (4.37) eines freien Teilchens zurückgeführt:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (4.60)$$

Dieses stimmt mit (4.18) überein und beweist, daß das Prinzip der kürzesten Verbindung zweier Punkte verträglich ist mit dem Konzept einer Kurve, die ihren eigenen Tangentialvektor parallelverschiebt. Die affine Parameterisierung der Geodäte hat zur Folge, daß die Länge des Tangentialvektors während des Kurvenverlaufes unverändert bleibt. Ohne diese Eigenschaft ließe sich das Tangentialvektorfeld nicht als Historie eines Paralleltransportes interpretieren.

Die Länge der Verbindung zweier Punkte entlang einer Geodäten ist nur dann minimal, wenn es sich um eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiv definiten Metrik handelt. Ist die Metrik nicht positiv definit, kann die Länge einer Kurve zwischen zwei Punkten durch eine Geodäte auch maximiert werden. Tatsächlich haben die Geodäten des Raum–Zeitkontinuums maximale Bogenlänge, wenn wie in unserem Fall die „West Coast Metric“ mit der Signatur  $s = -2$  verwendet wird. Die physikalische Bedeutung der Bogenlänge einer Weltlinie ist die Eigenzeit des mitbewegten Objektes. Unabhängig von den die Minkowskimetrik betreffenden Konventionen wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie das geometrische Prinzip der extremalen Bogenlänge zum Prinzip der maximalen Eigenzeit. Versucht man die Weltlinie zwischen zwei Ereignissen im Raum–Zeitkontinuum durch nichtgravitative Kräfte zu beeinflussen, verkürzt man die Zeitspanne, die für das bewegte Objekt selbst verstreicht.

### 4.3.5 Beispiele

Wir wollen die Methode zur Berechnung von Christoffelsymbolen mit Hilfe der Lagrangefunktion eines freien Teilchens an zwei Beispielen demonstrieren:

– *Polarkoordinaten:*

Aus der Metrik (3.23) gewinnen wir die Lagrangefunktion

$$L_p = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (4.61)$$

Die Schritte zur Berechnung der Euler–Lagrangeschen Gleichungen sind:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{r}) = 2\ddot{r} \quad (4.62)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (2r^2 \dot{\varphi}) = 2r^2 \ddot{\varphi} + 4r \dot{r} \dot{\varphi} \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial r} = 2r \dot{\varphi}^2 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.65)$$

Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen lauten somit:

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 \quad (4.66)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{1}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (4.67)$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen lassen sich die Christoffelsymbole ablesen, wobei in (4.67) die Symmetrie  $\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi$  als Ursache für den Faktor 2 zu berücksichtigen ist. Wir vermeiden die Mehrfachauflistung von Symbolen mit dieser Indexsymmetrie, indem wir uns jeweils auf ein Exemplar beschränken. Die gesuchten Christoffelsymbole lauten

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}. \quad (4.68)$$

– *Kugelkoordinaten:*

Aus der Metrik (3.32) gewinnen wir die Lagrangefunktion

$$L_p = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2. \quad (4.69)$$

Die Schritte zur Berechnung der Euler–Lagrangeschen Gleichungen sind:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (2\dot{r}) = 2\ddot{r} \quad (4.70)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} (2r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}) \quad (4.71)$$

$$= 2r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} + 4r \sin^2(\vartheta) \dot{r} \dot{\varphi} + 4r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi} \dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{\vartheta}} \right) = \frac{d}{dt} (2r^2 \dot{\vartheta}) = 2r^2 \ddot{\vartheta} + 4r \dot{r} \dot{\vartheta} \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial r} = 2r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + 2r \dot{\vartheta}^2 \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \vartheta} = 2r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2. \quad (4.75)$$

Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen lauten somit:

$$\ddot{r} - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 - r \dot{\vartheta}^2 = 0 \quad (4.76)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} = 0 \quad (4.77)$$

$$\ddot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + 2 \frac{1}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} = 0. \quad (4.78)$$

Aus diesen Bewegungsgleichungen lassen sich die Cristoffelsymbole ablesen, wobei wie im letzten Beispiel deren Indexsymmetrie zu berücksichtigen ist:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2(\vartheta) & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi &= \cot(\vartheta) \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta). \end{aligned} \quad (4.79)$$

## 4.4 Kovariante Vektorkomponenten

In Abschnitt 4.1 haben wir die kovariante Ableitung für kontravariante Vektorkomponenten  $v^i$  hergeleitet:

$$v^k{}_{|i} = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k + \Gamma_{ij}^k v^j. \quad (4.80)$$

Jetzt wollen wir diese durch eine Version für kovariante Vektorkomponenten ergänzen. Zu diesem Zweck rufen wir uns noch einmal ins Gedächtnis, daß kovariante Vektorkomponenten  $v_i$  die Koeffizienten von Linearformen  $v(\underline{y})$  sind, die einen Vektor  $\underline{y}$  auf eine reelle Zahl abbilden. Gemäß (2.50) generiert eine Koordinatenbasis  $\underline{u}_i$  des Tangentialvektorraumes im Dualraum eine Basis  $u^i(\underline{y}) = y^i$ , in welcher  $v(\underline{y})$  entwickelt werden kann:

$$v(\underline{y}) = v_i u^i(\underline{y}). \quad (4.81)$$

Auch hier führen wir die kovariante Ableitung als Maß für die differentielle Änderung der Linearform  $v()$  entlang der Koordinate  $x^i$  ein:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v() =: v_k{}_{|i} u^k(). \quad (4.82)$$

Die Klammern  $()$  sollen an den Abbildungscharakter dieser Größen erinnern. Wertet man die partielle Ableitung für die Basisdarstellung (4.81) aus, erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v() = \frac{\partial}{\partial x^i} (v_j u^j()) = \frac{\partial}{\partial x^i} v_j u^j() + v_j \frac{\partial}{\partial x^i} u^j(). \quad (4.83)$$

Im nächsten Schritt führen wir die Ableitung der Basisform  $u^j()$  auf die Ableitung des zu  $u^j()$  isomorphen Vektors  $\underline{u}^{(j)}$  zurück, den wir in Abschnitt 2.3.4 mit Hilfe der Metrik eingeführt haben. Zunächst jedoch benötigen wir eine die Komponenten  $g^{ij}$  betreffende Hilfsrelation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} &= \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{il} g^{jm} g_{lm}) \\ &= g^{jm} g_{lm} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{il} + g^{il} g_{lm} \frac{\partial}{\partial x^k} g^{jm} + g^{il} g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lm} \\ &= \delta_l^j \frac{\partial}{\partial x^k} g^{il} + \delta_m^i \frac{\partial}{\partial x^k} g^{jm} + g^{il} g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lm} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} + g^{il} g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lm} \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} = -g^{il} g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lm}. \quad (4.85)$$

Damit können wir die partielle Ableitung des zur Basisabbildung  $u^j()$  isomorphen Vektors  $\underline{u}^{(j)} = g^{jl} \underline{u}_l$  berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{jl} \underline{u}_l) = \frac{\partial}{\partial x^i} g^{jl} \underline{u}_l + g^{jl} \frac{\partial}{\partial x^i} \underline{u}_l \\ &= -g^{jm} g^{lk} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} \underline{u}_l + g^{jm} \Gamma_{im}^l \underline{u}_l \quad \Leftarrow \text{Aus (4.85) und (4.5)} \\ &= -g^{jm} g^{lk} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \Gamma_{im,k} \right) \underline{u}_l \\ &= -g^{jm} g^{lk} \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} + \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{im} \right) \right] \underline{u}_l \\ &= -g^{jm} g^{lk} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{im} - \frac{\partial}{\partial x^m} g_{ik} \right) \underline{u}_l \\ &= -g^{jm} g^{lk} \Gamma_{ik,m} \underline{u}_l = -\Gamma_{ik}^j g^{kl} \underline{u}_l = -\Gamma_{ik}^j \underline{u}^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die partielle Ableitung dieses Vektors bestimmt über Gleichung (2.65) die partielle Ableitung der Basisabbildung  $u^k()$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^i} u^j() = -\Gamma_{ik}^j u^k(). \quad (4.87)$$

Diese setzen wir in (4.83) ein und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x^i} v() = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} v_k - \Gamma_{ik}^j v_j \right) u^k() = v_{k|i} u^k(), \quad (4.88)$$

woraus wir die Koeffizienten  $v_{k|i}$  ablesen können. Schließlich zeigen wir die kovariante Ableitung für kontra- und kovariante Vektorkomponenten noch einmal im Vergleich:

$$v^k_{|i} = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k + \Gamma_{ij}^k v^j \quad (4.89)$$

$$v_{k|i} = \frac{\partial}{\partial x^i} v_k - \Gamma_{ik}^j v_j. \quad (4.90)$$

## 4.5 Erweiterung für Tensoren höherer Stufe

Die Übertragung des Konzeptes der kovarianten Ableitung von Vektoren auf Tensoren der Stufe  $p$  ist leicht verständlich, wenn man bedenkt, daß hierbei nicht nur die Basis eines Grundvektorraumes sondern  $p$  mitbewegte Basen zu berücksichtigen sind. Daher entstehen statt eines einzelnen  $\Gamma_{ij}^k$ -Termes jeweils einer für jeden Grundvektorraum, in unserem Fall also  $p$  Stück. Die kovariante Ableitung für  $p$ -fach kontravariante bzw.  $p$ -fach kovariante Tensorkomponenten lautet

$$t^{k^1 \dots k^p}_{|i} = \frac{\partial}{\partial x^i} t^{k^1 \dots k^p} + \Gamma_{ij}^{k^1} t^{j, k^2 \dots k^p} + \dots + \Gamma_{ij}^{k^p} t^{k^1 \dots k^{p-1}, j} \quad (4.91)$$

$$t_{k^1 \dots k^p |i} = \frac{\partial}{\partial x^i} t_{k^1 \dots k^p} - \Gamma_{ik^1}^j t_{j, k^2 \dots k^p} - \dots - \Gamma_{ik^p}^j t_{k^1 \dots k^{p-1}, j}. \quad (4.92)$$

Für gemischte Tensorkomponenten setzt sich die kovariante Ableitung auf offensichtliche Weise aus Termen der Form (4.91) und (4.92) zusammen.

### 4.5.1 Die Produktregel

Da die kovariante Ableitung eine spezielle Art der Differentiation darstellt, muß sie eine Produktregel erfüllen. Tatsächlich leistet die kovariante Ableitung dieses sogar für zwei Multiplikationstypen:

– *Das Tensorprodukt*

Der Beweis ist zwar einfach zu verstehen, aber in allgemeiner Form umständlich aufzuschreiben. Wir beschränken uns daher auf ein Beispiel, an dem sich das Prinzip erkennen läßt, nämlich das Tensorprodukt eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{t}$  und eines einstufigen Tensors  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned}
(t^{j_1 j_2} v^k)_{|i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (t^{j_1 j_2} v^k) + \Gamma_{il}^{j_1} t^{lj_2} v^k + \Gamma_{il}^{j_2} t^{j_1 l} v^k + \Gamma_{il}^k t^{j_1 j_2} v^l \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} t^{j_1 j_2} v^k + t^{j_1 j_2} \frac{\partial}{\partial x^i} v^k \\
&+ (\Gamma_{il}^{j_1} t^{lj_2} + \Gamma_{il}^{j_2} t^{j_1 l}) v^k + t^{j_1 j_2} \Gamma_{il}^k v^l \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} t^{j_1 j_2} + \Gamma_{il}^{j_1} t^{lj_2} + \Gamma_{il}^{j_2} t^{j_1 l} \right) v^k \\
&+ t^{j_1 j_2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} v^k + \Gamma_{il}^k v^l \right) \\
&= t^{j_1 j_2}{}_{|i} v^k + t^{j_1 j_2} v^k{}_{|i}.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Damit ist die Produktregel für dieses Beispiel eines Tensorproduktes bewiesen.

– *Die Überschiebung*

In Komponenten ausgedrückt ist die Überschiebung eine Verallgemeinerung des Matrixproduktes. Auch hier läßt sich die Beweisidee für die Produktregel besser an einem Beispiel als in einer allgemeinen Formulierung nachvollziehen. Wieder wählen wir einen Tensor  $\mathbf{t}$  zweiter Stufe und einen Tensor  $\mathbf{v}$  erster Stufe:

$$\begin{aligned}
(t^{kl} v_l)_{|i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (t^{kl} v_l) + \Gamma_{im}^k t^{ml} v_l \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i} t^{kl} v_l + t^{kl} \frac{\partial}{\partial x^i} v_l + \Gamma_{im}^k t^{ml} v_l \\
&+ \Gamma_{im}^l t^{km} v_l - \Gamma_{im}^l t^{km} v_l \quad \Leftarrow \text{künstlich hinzugefügt} \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} t^{kl} + \Gamma_{im}^k t^{ml} + \Gamma_{im}^l t^{km} \right) v_l \\
&+ t^{kl} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} v_l - \Gamma_{il}^m v_m \right) \quad \Leftarrow l \text{ und } m \text{ vertauscht} \\
&= t^{kl}{}_{|i} v_l + t^{kl} v_l{}_{|i}.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Die Produktregel gilt also auch für dieses Beispiel einer Überschiebung. Es ist leicht zu verstehen, daß sich der Beweismechanismus auf den Fall mehrerer Indizes und Summationsindizes übertragen läßt.

#### 4.5.2 Der Satz von Ricci

Dieser Satz trifft eine Aussage über die kovariante Ableitung des Metrischen Tensors, welche wir (4.92) folgend zunächst für dessen kovariante Komponenten herleiten werden:

$$\begin{aligned}
 g_{ij|k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \Gamma_{ki,j} - \Gamma_{kj,i} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Um die kovariante Ableitung auch für die kontravarianten Komponenten  $g^{ij}$  berechnen zu können, benötigen wir einerseits die Hilfsrelation (4.85) für die partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij}$  und andererseits die zweite Zeile von (4.95):

$$\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} = \Gamma_{ki,j} + \Gamma_{kj,i}. \tag{4.96}$$

Damit lautet die kovariante Ableitung von  $g^{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 g^{ij|k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} + \Gamma_{km}^i g^{mj} + \Gamma_{kl}^j g^{il} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^k} g^{ij} + g^{il} g^{jm} (\Gamma_{km,l} + \Gamma_{kl,m}) \\
 &= -g^{il} g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lm} + g^{il} g^{jm} (\Gamma_{km,l} + \Gamma_{kl,m}) \quad \Leftarrow \text{Aus (4.85)} \\
 &= g^{il} g^{jm} (-\Gamma_{kl,m} - \Gamma_{km,l} + \Gamma_{km,l} + \Gamma_{kl,m}) \quad \Leftarrow \text{Aus (4.96)} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Da die kovariante Ableitung des Metrischen Tensors und seines Inversen verschwindet, ist das Herauf- und Herunterziehen von Indizes mit dieser vertauschbar. Es ist somit möglich, innerhalb der kovarianten Ableitung Indizes herauf- und herunterziehen ohne daß zusätzliche Terme mit Ableitungen des Metrischen Tensors entstehen. Durch den Satz von Ricci ist diese Operation mit der kovarianten Ableitung verträglich und eine Gleichung wie

$$v_{k|i} = g_{kl} v^l{}_{|i} \quad (4.98)$$

ist ohne weiteres gültig.

## 4.6 Beispiele

Um ein Gefühl für die Einsatzmöglichkeiten der kovarianten Ableitung zu bekommen, berechnen wir mit ihrer Hilfe die Differentialoperatoren Gradient (grad) und Divergenz (div) in Polar- und Kugelkoordinaten. Die Rotation (rot) lassen wir bewußt aus, weil hierbei außer komplexer Rechnungen nichts neues präsentiert wird. Darüberhinaus kann die Schiefsymmetrie der Rotation erst mit Hilfe der äußeren Ableitung im Rahmen von Differentialformen angemessen berücksichtigt werden.

### 4.6.1 Polarkoordinaten

Für den Wechsel zwischen ko- und kontravarianten Komponenten benötigen wir den Metrischen Tensor und sein Inverses:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (4.99)$$

Der Gradient:

Wir betrachten eine Funktion in Polarkoordinaten

$$f = f(r, \varphi) \quad (4.100)$$

mit den kovarianten Ableitungen

$$f_{|r} = \frac{\partial}{\partial r} f \quad (4.101)$$

$$f_{|\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f. \quad (4.102)$$

Da die Funktion  $f$  ein Tensor 0-ter Stufe ist treten keine Terme mit Christoffelsymbolen auf. Wir benötigen die kontravariante Version dieser Komponenten, um den Gradienten in der Koordinatenbasis darzustellen:

$$\text{grad } f = \frac{\partial}{\partial r} f \underline{u}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \underline{u}_\varphi. \quad (4.103)$$

Die in Lehrbüchern angegebene Version des Gradienten verwendet als Basis die Einheitsvektoren  $\underline{e}_r$  und  $\underline{e}_\varphi$ , welche mit Hilfe der Metrik (4.99) aus der Koordinatenbasis  $\{\underline{u}_r, \underline{u}_\varphi\}$  berechnet werden können:

$$\underline{u}_r = \underline{e}_r, \quad \underline{u}_\varphi = r \underline{e}_\varphi. \quad (4.104)$$

Mit diesen Einheitsvektoren schreibt sich der Gradient

$$\text{grad } f = \frac{\partial}{\partial r} f \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \underline{e}_\varphi. \quad (4.105)$$

### Die Divergenz:

Wir betrachten ein Vektorfeld in Polarkoordinaten

$$\underline{v} = v^r(r, \varphi) \underline{u}_r + v^\varphi(r, \varphi) \underline{u}_\varphi, \quad (4.106)$$

dessen Divergenz wir als Kontraktion der kovarianten Ableitung berechnen werden:

$$\text{div } \underline{v} := v^i{}_{|i} = v^r{}_{|r} + v^\varphi{}_{|\varphi}. \quad (4.107)$$

Die benötigten kovarianten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} v^r{}_{|r} &= \frac{\partial}{\partial r} v^r + \Gamma_{rr}^r v^r + \Gamma_{r\varphi}^r v^\varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial r} v^r \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} v^\varphi{}_{|\varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \Gamma_{\varphi r}^\varphi v^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi v^\varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{1}{r} v^r, \end{aligned} \quad (4.109)$$

womit die Divergenz folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \underline{v} &= \frac{\partial}{\partial r} v^r + \frac{1}{r} v^r + \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v^r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi.\end{aligned}\tag{4.110}$$

In der Literatur beziehen sich Vektorkomponenten für gewöhnlich auf Einheitsvektoren, so daß wir umskalieren müssen:

$$\underline{v} = v'^r \underline{e}_r + v'^\varphi \underline{e}_\varphi\tag{4.111}$$

$$v'^r = v^r, \quad v'^\varphi = r v^\varphi.\tag{4.112}$$

In diesen Komponenten geschrieben erhält die Divergenz die aus der Literatur bekannte Gestalt

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v'^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} v'^\varphi.\tag{4.113}$$

#### 4.6.2 Kugelkoordinaten

Für den Wechsel zwischen ko- und kontravarianten Komponenten benötigen wir den Metrischen Tensor und sein Inverses:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}.\tag{4.114}$$

Der Gradient:

Wir betrachten eine Funktion  $f$  in Kugelkoordinaten

$$f = f(r, \varphi, \vartheta)\tag{4.115}$$

mit den kovarianten Ableitungen

$$f_{|r} = \frac{\partial}{\partial r} f \quad (4.116)$$

$$f_{|\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f \quad (4.117)$$

$$f_{|\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} f. \quad (4.118)$$

Die Funktion  $f$  ist ein Tensor 0-ter Stufe, und somit treten keine Terme mit Christoffelsymbolen auf. Wir benötigen die kontravariante Version dieser Komponenten, um den Gradienten in der Koordinatenbasis darzustellen:

$$\text{grad } f = \frac{\partial}{\partial r} f \underline{u}_r + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \underline{u}_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f \underline{u}_\vartheta. \quad (4.119)$$

Die in der Literatur angegebene Version des Gradienten verwendet als Basis die Einheitsvektoren  $\underline{e}_r$ ,  $\underline{e}_\varphi$  und  $\underline{e}_\vartheta$ , welche mit Hilfe der Metrik (4.114) aus der Koordinatenbasis  $\{\underline{u}_r, \underline{u}_\varphi, \underline{u}_\vartheta\}$  berechnet werden können:

$$\underline{u}_r = \underline{e}_r, \quad \underline{u}_\varphi = r \sin(\vartheta) \underline{e}_\varphi, \quad \underline{u}_\vartheta = r \underline{e}_\vartheta. \quad (4.120)$$

Mit diesen Einheitsvektoren schreibt sich der Gradient

$$\text{grad } f = \frac{\partial}{\partial r} f \underline{e}_r + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} f \underline{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f \underline{e}_\vartheta. \quad (4.121)$$

Die Divergenz:

Wir betrachten ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten

$$\underline{v} = v^r(r, \varphi, \vartheta) \underline{u}_r + v^\varphi(r, \varphi, \vartheta) \underline{u}_\varphi + v^\vartheta(r, \varphi, \vartheta) \underline{u}_\vartheta, \quad (4.122)$$

dessen Divergenz wir als Kontraktion der kovarianten Ableitung berechnen werden:

$$\text{div } \underline{v} := v^i{}_{|i} = v^r{}_{|r} + v^\varphi{}_{|\varphi} + v^\vartheta{}_{|\vartheta}. \quad (4.123)$$

Die benötigten kovarianten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} v^r|_r &= \frac{\partial}{\partial r} v^r + \Gamma_{rr}^r v^r + \Gamma_{r\varphi}^r v^\varphi + \Gamma_{r\vartheta}^r v^\vartheta \\ &= \frac{\partial}{\partial r} v^r \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned} v^\varphi|_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \Gamma_{\varphi r}^\varphi v^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi v^\varphi + \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi v^\vartheta \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{1}{r} v^r + \cot(\vartheta) v^\vartheta \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} v^\vartheta|_\vartheta &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} v^\vartheta + \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta v^r + \Gamma_{\vartheta\varphi}^\vartheta v^\varphi + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\vartheta v^\vartheta \\ &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} v^\vartheta + \frac{1}{r} v^r, \end{aligned} \quad (4.126)$$

womit die Divergenz folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{v} &= \frac{\partial}{\partial r} v^r + \frac{2}{r} v^r + \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{\partial}{\partial \vartheta} v^\vartheta + \cot(\vartheta) v^\vartheta \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^r) + \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) v^\vartheta). \end{aligned} \quad (4.127)$$

In der Literatur beziehen sich Vektorkomponenten für gewöhnlich auf Einheitsvektoren, so daß wir umskalieren müssen:

$$\underline{v} = v'^r \underline{e}_r + v'^\varphi \underline{e}_\varphi + v'^\vartheta \underline{e}_\vartheta \quad (4.128)$$

$$v'^r = v^r, \quad v'^\varphi = r \sin(\vartheta) v^\varphi, \quad v'^\vartheta = r v^\vartheta. \quad (4.129)$$

In diesen Komponenten geschrieben erhält die Divergenz die aus der Literatur bekannte Gestalt

$$\operatorname{div} \underline{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^r) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} v^\varphi + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin(\vartheta) v^\vartheta). \quad (4.130)$$

## 5 Der Riemann–Christoffelsche Krümmungstensor

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der zweifachen kovarianten Ableitung eines Vektors  $\underline{v}$ , einem Thema, das auf den ersten Blick den Eindruck einer uninteressanten technischen Übung vermittelt. Tatsächlich jedoch gewinnen wir auf diese Weise tiefere Einblicke in die Struktur der zugrundeliegenden differenzierbaren Punktmannigfaltigkeit oder anders ausgedrückt in die Eigenschaften des betrachteten Raumes.

Zu diesem Zweck interpretieren wir die kovariante Ableitung  $v^k|_i$  geometrisch als differentielle Verschiebung des Vektors  $\underline{v}$  entlang der Koordinate  $x^i$ . Die zweifache kovariante Ableitung  $v^k|_j|i$  ist demnach eine differentielle Verschiebung von  $\underline{v}$  zuerst entlang  $x^i$  und anschließend entlang  $x^j$ . Ist der Raum nicht gekrümmt, erhält man dasselbe Resultat, wenn man die Wege vertauscht, d.h. wenn man  $\underline{v}$  erst entlang  $x^j$  und dann entlang  $x^i$  verschiebt. Weichen die Resultate der beiden Verschiebungspfade voneinander ab, ist das ein Indiz für die lokale Krümmung des Raumes.

### 5.1 Die Identität von Ricci

Wir betrachten die zweifache kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $\underline{v}$ , dessen erste kovariante Ableitung wir bereits aus (4.8) kennen:

$$v^k|_i = \frac{\partial}{\partial x^i} v^k + \Gamma_{ij}^k v^j. \quad (5.1)$$

Die zweite kovariante Ableitung lautet somit

$$\begin{aligned} v^k|_j|i &= \frac{\partial}{\partial x^j} v^k|_i + \Gamma_{jl}^k v^l|_i \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} v^k + \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{il}^k v^l) + \Gamma_{jl}^k \frac{\partial}{\partial x^i} v^l + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{in}^l v^n \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} v^k + \Gamma_{il}^k \frac{\partial}{\partial x^j} v^l + \Gamma_{jl}^k \frac{\partial}{\partial x^i} v^l + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^k v^l + \Gamma_{jl}^k \Gamma_{in}^l v^n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die ersten drei Terme des obenstehenden Ausdrucks sind symmetrisch in  $i$  und  $j$  und heben sich somit bei der Bildung der folgenden Differenz weg:

$$v^k|_j|i - v^k|_i|j = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jl}^k v^l - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{il}^k v^l + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jn}^l v^n - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{in}^l v^n. \quad (5.3)$$

Über diese Gleichung läßt sich ein neuer Tensor definieren:

$$v^k{}_{|j|i} - v^k{}_{|i|j} =: R^k{}_{nij} v^n \quad (5.4)$$

$$R^k{}_{nij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^k{}_{jn} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^k{}_{in} + \Gamma^k{}_{il} \Gamma^l{}_{jn} - \Gamma^k{}_{jl} \Gamma^l{}_{in} . \quad (5.5)$$

Gleichung (5.4) ist die **Identität von Ricci**, in welcher der Tensor  $R^k{}_{nij}$  in Erscheinung tritt. Dieser wird als **Riemann–Christoffelscher Krümmungstensor** bezeichnet, dessen Komponenten in (5.5) durch die Metrik der Punktmannigfaltigkeit festgelegt werden. Einige Eigenschaften des Krümmungstensors lassen sich besser anhand seiner vierfach kovarianten Komponenten studieren:

$$R_{mnij} = g_{mk} R^k{}_{nij} . \quad (5.6)$$

Zu deren Berechnung benötigen wir erneut die Hilfsbeziehung (4.96):

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} = \Gamma_{im,k} + \Gamma_{ik,m} . \quad (5.7)$$

Zunächst ziehen wir im ersten Term von (5.5) den Index  $k$  herunter:

$$\begin{aligned} g_{mk} \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^k{}_{jn} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jn,m} - \Gamma^k{}_{jn} \frac{\partial}{\partial x^i} g_{mk} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jn,m} - \Gamma^k{}_{jn} (\Gamma_{im,k} + \Gamma_{ik,m}) . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diesen Term sowie die Version mit vertauschtem  $i$  und  $j$  benötigen wir für die Berechnung der  $R_{mnij}$ :

$$\begin{aligned} R_{mnij} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jn,m} - \Gamma^k{}_{jn} (\Gamma_{im,k} + \Gamma_{ik,m}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{in,m} + \Gamma^k{}_{in} (\Gamma_{jm,k} + \Gamma_{jk,m}) \\ &\quad + \Gamma^k{}_{jn} \Gamma_{ik,m} - \Gamma^k{}_{in} \Gamma_{jk,m} . \end{aligned} \quad (5.9)$$

In dem obenstehenden Ausdruck heben sich vier Terme weg und wir erhalten

$$R_{mnij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jn,m} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{in,m} + \Gamma^k{}_{in} \Gamma_{jm,k} - \Gamma^k{}_{jn} \Gamma_{im,k} . \quad (5.10)$$

## 5.2 Geometrische Interpretation

Am einfachsten lassen sich die in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit herrschenden Verhältnisse in der Form eines geschickt gewählten geometrischen Bildes verstehen, welches die Rolle des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors auf anschauliche Weise demonstriert. Hierfür fassen wir die Identität von Ricci (5.4) als Beziehung zwischen Differentialen auf:

$$\Delta v^k := v^k_{|j|i} ds^j dr^i - v^k_{|i|j} dr^i ds^j = R^k_{nij} v^n dr^i ds^j. \quad (5.11)$$

Die  $dr^i$  und  $ds^j$  sind die Komponenten zweier Pfadelemente  $d\underline{r}$  und  $d\underline{s}$ . Wenn die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $\underline{v}(x^i)$  im betrachteten Gebiet verschwindet, entsprechen die Operationen  ${}_{|i} dr^i$  und  ${}_{|j} ds^j$  jeweils Parallelverschiebungen des Vektors  $\underline{v}$  entlang der differentiellen Pfade  $d\underline{r}$  und  $d\underline{s}$ , vgl. (4.12). Um zu beweisen, daß der Prozeß von Parallelverschiebungen eines Vektors  $\underline{v}$  entlang des von den Pfadelementen  $d\underline{r}$  und  $d\underline{s}$  aufgespannten Parallelogramms der Identität von Ricci entspricht, bilden wir (5.11) durch Parallelverschiebungen nach:

– Der Term  $v^k_{|i|j} dr^i ds^j$ :

In den folgenden Gleichungen stehen einfach- und doppeltgestrichene Größen für deren Werte nach einer Parallelverschiebung entlang  $d\underline{r}$  bzw.  $d\underline{s}$ :

$$v'^k := v^k(x^i + dr^i) \quad (5.12)$$

$$v''^k := v'^k(x^i + ds^i). \quad (5.13)$$

Wir berechnen den Effekt der beiden aufeinanderfolgenden Verschiebungsoperationen mit Hilfe von (4.14):

$$v'^k = v^k - \Gamma^k_{ni} v^n dr^i \quad (5.14)$$

$$v''^k = v'^k - \Gamma'^k_{lj} v'^l ds^j \quad (5.15)$$

$$\Gamma'^k_{lj} = \Gamma^k_{lj} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^k_{lj} dr^i. \quad (5.16)$$

In der letzten Gleichung wurden die verschobenen  $\Gamma'^k_{lj}$  um den Ausgangswert  $\Gamma^k_{lj}$  bis zur ersten Ordnung in den  $dr^i$  entwickelt. Alle drei Gleichungen ineinander eingesetzt ergeben bis zur zweiten Ordnung in den Pfadelementen

$$v''^k_{(1)} = v^k - \Gamma^k_{ni} v^n dr^i - \Gamma^k_{lj} v^l ds^j - \dots \quad (5.17)$$

$$\dots - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^k_{lj} v^l dr^i ds^j + \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{ni} v^n dr^i ds^j.$$

Durch den Subskript  $(1)$  kennzeichnen wir den hier verwendeten Verschiebungspfad entlang  $d\underline{r} \rightarrow d\underline{s}$ . Der Fußpunkt des Vektors  $\underline{v}$  durchläuft somit zwei Seiten des von  $d\underline{r}$  und  $d\underline{s}$  aufgespannten Parallelogramms.

– Der Term  $v^k_{|j|i} ds^j dr^i$ :

Dieser Term beschreibt die Parallelverschiebung von  $\underline{v}$  entlang des differentiellen Pfades  $d\underline{s} \rightarrow d\underline{r}$ , in dem die Pfadelemente in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt sind. Damit haben die einfach- und doppeltgestrichenen Größen die Bedeutung

$$v'^k := v^k(x^i + ds^i) \quad (5.18)$$

$$v''^k := v'^k(x^i + dr^i). \quad (5.19)$$

Diesesmal wirken sich die Verschiebungen folgendermaßen aus:

$$v'^k = v^k - \Gamma_{nj}^k v^n ds^j \quad (5.20)$$

$$v''^k = v'^k - \Gamma_{li}^k v'^l dr^i \quad (5.21)$$

$$\Gamma_{li}^k = \Gamma_{li}^k + \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{li}^k ds^j. \quad (5.22)$$

Damit lautet das Resultat für die Parallelverschiebung über den gesamten Pfad bis zur zweiten Ordnung in den Pfadelementen

$$\begin{aligned} v''^k_{(2)} &= v^k - \Gamma_{nj}^k v^n ds^j - \Gamma_{li}^k v'^l dr^i - \dots \\ &\dots - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{li}^k v'^l ds^j dr^i + \Gamma_{li}^k \Gamma_{nj}^l v^n ds^j dr^i. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Der Subskript  $(2)$  besagt, daß der Fußpunkt des Vektors  $\underline{v}$  nun die zu  $(1)$  komplementären Seiten des Parallelogramms der Pfadelemente abfährt.

Da der Vektor  $\underline{v}$  über die Verschiebungspfade  $(1)$  und  $(2)$  denselben Endpunkt erreicht, können wir beide Resultate durch Differenzbildung miteinander vergleichen:

$$\begin{aligned} \Delta v^k &= v''^k_{(2)} - v''^k_{(1)} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{li}^k - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{lj}^k + \Gamma_{li}^k \Gamma_{nj}^l - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ni}^l \right) v^n dr^i ds^j \\ &= R^k_{nij} v^n dr^i ds^j. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dieses ist derselbe Ausdruck, den wir bereits in (5.11) aus der Differenz der vertauschten kovarianten Ableitungen hergeleitet haben. Damit ist bewiesen, daß die lokale

Krümmung einer Mannigfaltigkeit durch den Prozeß der Parallelverschiebungen korrekt beschrieben wird. Gleichung (5.24) hat zwei mögliche geometrische Interpretationen:

- Den Vergleich der Parallelverschiebung des Vektors  $\underline{v}$  zu einem benachbarten Punkt entlang unterschiedlicher differentieller Pfade  $d\underline{r} \rightarrow d\underline{s}$  und  $d\underline{s} \rightarrow d\underline{r}$ .
- Den Vergleich des über einen geschlossenen Pfad zurück zum Ursprungspunkt verschobenen Vektors  $\underline{v}$  mit seiner unverschobenen Version. Der geschlossene Pfad besteht aus dem Parallelogramm  $d\underline{r} \rightarrow d\underline{s} \rightarrow -d\underline{r} \rightarrow -d\underline{s}$ .

Auf den ersten Blick mag es seltsam erscheinen, daß Parallelverschiebungen zum gleichen Ziel entlang unterschiedlicher Pfade überhaupt verschieden ausfallen können, denn schließlich besteht ja der Sinn einer Parallelverschiebung darin, jede Änderung des verschobenen Vektors zu unterbinden. Tatsächlich werden die Änderungen jedoch nur in erster Ordnung in den Pfadelementen unterdrückt. Die Differenz (5.24) ist ein Effekt zweiter Ordnung, der erst in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit bei Verwendung von linear unabhängigen Pfadelementen zum Tragen kommt. Das Verschwinden der Differenz  $\Delta v^k$  bei linear abhängigen Streckenstücken  $d\underline{s} = \alpha d\underline{r}$  ist eine Folge der Antisymmetrie des Krümmungstensors  $R^k_{nij}$  in den Indizes  $i$  und  $j$ , durch welche  $\Delta v^k$  als Überschiebung eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen Tensor verschwindet:

$$\Delta v^k = \alpha R^k_{nij} v^n dr^i dr^j = 0. \quad (5.25)$$

Diese und weitere Symmetrien des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors sind Thema des folgenden Abschnittes. Eine Mannigfaltigkeit gilt als gekrümmt, wenn die Komponenten des Krümmungstensors von Null verschieden sind, und oft wird der Paralleltransport eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve als operative Methode zur Bestimmung der lokalen Krümmung angegeben. Das einfachste anschauliche Beispiel für diesen Prozeß ist eine zweidimensionale Kugeloberfläche, auf der ein Vektor parallelverschoben wird: Man betrachtet den Tangentialvektor an einen bestimmten Längengrad im Nordpol und verschiebt diesen entlang des Längengrades bis zum Äquator, wobei die Spitze des Vektors stets nach Süden zeigt. Anschließend verschiebt man den Vektor ein Stück entlang des Äquators, indem der Fußpunkt den Äquator entlangfährt und die Spitze weiterhin nach Süden ausgerichtet bleibt. Schließlich fährt man mit dem Vektor entlang des aktuellen Längengrades wieder zurück zum Nordpol, wobei auch diesmal die Spitze ihre südliche Orientierung beibehält. Obwohl der Vektor entlang des gesamten Weges parallelverschoben wurde hat er nicht mehr die gleiche Richtung wie zu Beginn. Er ist stattdessen um einen Winkel gedreht, der den überstrichenen Längengraden während der Äquatorfahrt entspricht.

Die hier vorgestellten geometrischen Veranschaulichungen sollen helfen, die folgenden Aussagen über gekrümmte Mannigfaltigkeiten besser zu verstehen:

- *Vergleichbarkeit entfernter Vektoren:*

Vektoren an verschiedenen Punkten einer Mannigfaltigkeit lassen sich nur vergleichen, indem einer der Vektoren zum Ort des anderen paralleltransportiert wird bevor man beispielsweise die Differenz bildet. Das Resultat des Paralleltransportes hängt jedoch vom durchlaufenen Pfad ab und ist somit mehrdeutig. Ein sinnvoller Vergleich von Vektoren in verschiedenen Raumpunkten läßt sich aufgrund dieser Mehrdeutigkeit nicht durchführen. Ausgenommen sind flache Mannigfaltigkeiten in denen ohnehin sämtliche Tangentialvektorräume miteinander identifiziert werden können und wo der Paralleltransport auch über endliche Entfernungen eindeutig definiert ist.

- *Vergleichbarkeit differentiell benachbarter Vektoren:*

Die Krümmung einer Mannigfaltigkeit ist ein Effekt zweiter Ordnung in den Pfad-elementen, der bei kleiner werdenden Abständen immer weniger ins Gewicht fällt und in der differentiellen Umgebung eines Punktes schließlich vernachlässigbar wird. Damit ist innerhalb einer solchen Umgebung die Parallelverschiebung von Vektoren eindeutig, und Vergleiche wie die Differenzbildung erhalten auch dann einen Sinn, wenn die Vektoren an differentiell benachbarten Punkten positioniert sind. Auf dieser Grundlage hatten wir mit Hilfe der Verbindungskoeffizienten  $\Gamma_{jk}^i$  eine Differentialrechnung über gekrümmten Mannigfaltigkeiten einführen können, als deren Vertreter wir die kovariante Ableitung und den Riemann–Christoffelschen Krümmungstensor kennengelernt haben.

### 5.3 Symmetrien

Die  $n^4$  Komponenten des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors zeigen eine Vielzahl von Symmetrien, die in einer abgewandelten Form seiner vierfach kovarianten Komponenten  $R_{mni j}$  leichter nachzuvollziehen sind:

$$R_{mni j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^n} g_{jm} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^n} g_{im} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^m} g_{jn} + \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^m} g_{in} \right) \quad (5.26)$$

$$+ g^{kl} \left( \Gamma_{in,l} \Gamma_{jm,k} - \Gamma_{jn,l} \Gamma_{im,k} \right).$$

Die ersten vier Ausdrücke entstehen, wenn man die Christoffelsymbole der ersten beiden Terme aus (5.10) in ihre Bestandteile zerlegt. In den letzten beiden Summanden wurde das Hochziehen von  $k$  vor die Klammer gezogen, damit diese nur Christoffelsymbole erster Art enthält. An Gleichung (5.26) lassen sich die folgenden Symmetrien direkt ablesen:

$$R_{mnij} = -R_{mnji} \quad (i \leftrightarrow j) \quad (5.27)$$

$$R_{mnij} = -R_{nmij} \quad (m \leftrightarrow n) \quad (5.28)$$

$$R_{mnij} = R_{ijmn} \quad (ij \leftrightarrow mn) \quad (5.29)$$

Durch direktes Nachrechnen läßt sich ein weiterer Zusammenhang verifizieren:

$$R_{mnij} + R_{mijn} + R_{mjni} = 0. \quad (5.30)$$

Hierbei wurde in den drei Summanden der erste Index  $m$  festgehalten und die restlichen Indizes  $n$ ,  $i$  und  $j$  zyklisch durchgetauscht. Gleichung (5.30) wird als **Erste Identität von Bianchi** bezeichnet. Anhand dieser Symmetrien können wir die Anzahl der wesentlichen Komponenten des Krümmungstensors bestimmen:

– *Mehr als zwei gleiche Indizes:*

Die hochgradige Schiefsymmetrie (5.27) und (5.28) läßt Komponenten mit mehr als zwei gleichen Indizes verschwinden, z.B.

$$R_{mnnn} = 0. \quad (5.31)$$

– *Zwei verschiedene Indizes:*

Die Auswahl von 2 aus  $n$  Indizes ist auf  $n_{(2)}$  verschiedene Arten möglich:

$$R_{mnmn} : \quad n_{(2)} = \frac{1}{2} n(n-1). \quad (5.32)$$

Der Faktor  $1/2$  sorgt dafür, daß Vertauschungen des Typs (5.27) und (5.28) nicht mitgezählt werden.

– *Drei verschiedene Indizes:*

Es lassen sich auf  $n_{(3)}$  verschiedene Arten jeweils 3 aus  $n$  Indizes auswählen:

$$R_{minin} : \quad n_{(3)} = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2). \quad (5.33)$$

Die Zusätzlichen Symmetrien (5.29) und (5.30) schränken die Wahl dreier Indizes nicht weiter ein.

– Vier verschiedene Indizes:

Die Wahl von 4 aus  $n$  Indizes läßt sich auf  $n_{(4)}$  verschiedene Arten durchführen:

$$R_{mni j} : \quad n_{(4)} = \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3). \quad (5.34)$$

Die drei „Tauschsymmetrien“ steuern hier jeweils einen Faktor  $1/2$  bei. Die erste Identität von Bianchi erzeugt einen weiteren Faktor  $2/3$ , da jeweils zwei Indexkombinationen eine dritte festlegen. Insgesamt lautet der Vorfaktor somit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}. \quad (5.35)$$

Die Anzahl  $n_{(w)}$  der wesentlichen Komponenten ergibt sich aus der Summe der oben genannten Positionen:

$$\begin{aligned} n_{(w)} &= n_{(4)} + n_{(3)} + n_{(2)} \\ &= \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{1}{2} n(n-1)(n-1) \\ &= \frac{1}{12} n(n-1) (n^2 - 5n + 6 + 6(n-1)) \\ &= \frac{1}{12} n^2(n-1)(n+1) \\ &= \frac{1}{12} n^2(n^2-1). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Zahl der zu berechnenden Koeffizienten wird hierdurch erheblich reduziert:

$n$	$n^4$	$n_{(w)}$
1	1	0
2	16	1
3	81	6
4	256	20

Gewiß erscheint es seltsam, daß der Krümmungstensor in allen eindimensionalen Räumen mit  $R_{1111} = 0$  verschwindet. Die Krümmung z.B. einer Kreislinie ist jedoch nicht in der lokalen Nachbarschaft eines Punktes feststellbar sondern zählt vielmehr zu ihren globalen Eigenschaften. Anders ausgedrückt ist eine gekrümmte Linie analog zur Oberfläche eines Zylinders im Einbettungsraum immer abwickelbar.

## 5.4 Die Identität von Bianchi

Wenn von der **Identität von Bianchi** die Rede ist, meint man für gewöhnlich nicht die Gleichung (5.30) sondern eine Beziehung zwischen den kovarianten Ableitungen bestimmter Komponenten des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors:

$$R_{mni j|k} + R_{kmi j|n} + R_{nki j|m} = 0. \quad (5.37)$$

Hierbei wurden in allen drei Summanden die Indexgruppe  $ij$  festgehalten und die restlichen Indizes  $m, n$  und  $k$  zyklisch durchgetauscht. Zur Unterscheidung von (5.30) nennt man diese Beziehung auch die **Zweite Identität von Bianchi**.

Zum Beweis dieser Identität bedienen wir uns des folgenden Tricks: Eine Tensoridentität gilt in jedem Koordinatensystem, und wir werden versuchen, die Gestalt des Krümmungstensors durch geschickte Wahl der Koordinaten zu vereinfachen. Die Differentialgleichung (5.37) analysiert alle Größen in der Umgebung eines Punktes, in welcher wir Christoffelsymbole verschwinden lassen und kovariante durch partielle Ableitungen ersetzen können, wenn sich das Koordinatensystem dort wie ein Parallelkoordinatensystem verhält. Solche Koordinaten werden als **lokal geodätisch** bezeichnet. Diese Wahl geeigneter Koordinaten läßt sich mit dem Übergang zu einer Diagonalebasis vergleichen, in welcher die zu untersuchende symmetrische Matrix Diagonalgestalt annimmt weshalb man nur ihre Eigenwerte kennen muß. In lokal geodätischen Koordinaten können wir die Darstellung (5.26) der  $R_{mni j}$  verwenden und sämtliche Christoffelsymbole gleich Null setzen:

$$\begin{aligned} & R_{mni j|k} + R_{kmi j|n} + R_{nki j|m} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^n \partial x^k} g_{jm} - \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^n \partial x^k} g_{im} - \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^m \partial x^k} g_{jn} \right. \\ &+ \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^m \partial x^k} g_{in} + \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^m \partial x^n} g_{jk} - \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^m \partial x^n} g_{ik} \\ &- \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^k \partial x^n} g_{jm} + \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^k \partial x^n} g_{im} + \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^k \partial x^m} g_{jn} \\ &- \left. \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^k \partial x^m} g_{in} - \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^n \partial x^m} g_{jk} + \frac{\partial^3}{\partial x^j \partial x^n \partial x^m} g_{ik} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Da der Nulltensor in allen Koordinatensystemen verschwindet und weil wir in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit lokal geodätische Koordinaten einführen können, ist die Identität von Bianchi in der gesamten Mannigfaltigkeit eine vom Koordinatensystem unabhängige Eigenschaft des Krümmungstensors.

## 5.5 Kontraktionen

Wir werden nun untersuchen, welche weiteren Tensoren sich aus dem Riemann–Christoffelschen Krümmungstensor durch Kontraktion erzeugen lassen. In den meisten Fällen reduziert eine Kontraktion die Anzahl der wesentlichen Komponenten, was dazu führen kann, daß aus detaillierten Informationen grobkörnigere generiert werden.

### 5.5.1 Der Ricci Tensor

Aufgrund der partiellen Schiefsymmetrie der  $R_{mni j}$  verschwindet die Kontraktion der Indexgruppen  $mn$  und  $ij$ , weil hierbei der symmetrische Tensor  $\mathbf{g}$  mit schiefsymmetrischen Anteilen des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors überschoben wird:

$$g^{mn} R_{mni j} = g^{ij} R_{mni j} = 0. \quad (5.39)$$

Alle anderen Kontraktionen führen zu einem bis aufs Vorzeichen eindeutigen Resultat:

$$g^{kl} R_{kil j} = g^{kl} R_{ikj l} = -g^{kl} R_{kij l} = -g^{kl} R_{ikl j} =: R_{ij}. \quad (5.40)$$

Der so kontrahierte Krümmungstensor heißt **Ricci Tensor**:

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj}. \quad (5.41)$$

Infolge der Indexsymmetrien des Krümmungstensors ist der Ricci Tensor selbst symmetrisch:

$$R_{ji} = g^{kl} R_{kil j} = g^{kl} R_{ljk i} = R_{ji}. \quad (5.42)$$

Als symmetrischer Tensor besitzt der Ricci Tensor  $\frac{1}{2}n(n+1)$  wesentliche Komponenten. Ab  $n = 4$  Dimensionen hat der Riemann–Christoffelsche Krümmungstensor mehr wesentliche Komponenten (20 Stück) als der von ihm abgeleitete Ricci Tensor (10 Stück).

### 5.5.2 Die Skalare Krümmung

Aus dem Ricci Tensor kann durch eine weitere Kontraktion ein Skalar generiert werden:

$$R := R^j{}_j = g^{ji} R_{ij} = g^{kl} g^{ij} R_{kil j}. \quad (5.43)$$

Da dieser Skalar aus den Komponenten des Krümmungstensors gebildet wird, ist der Name **Skalare Krümmung** durchaus naheliegend. Der mit der Reduktion der  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$  wesentlichen Komponenten des Krümmungstensors auf eine einzige Zahl einhergehende Informationsverlust ist hier offensichtlich.

### 5.5.3 Die Divergenz des Ricci Tensors

Bei der Interpretation physikalischer Größen ist man häufig an der Aufstellung von Bilanzen interessiert, welche die Grundlage für die Formulierung von Erhaltungssätzen bilden. Ein wichtiges Hilfsmittel in solchen Bilanzen ist die Berechnung der Divergenz der betreffenden Größe. In diesem Abschnitt betrachten wir die Divergenz des Ricci Tensors:

$$\operatorname{div}(R_{ij}) := R_i^k{}_{|k}. \quad (5.44)$$

Grundlage für die Berechnung dieser Divergenz ist die Identität von Bianchi

$$R_{mni j|k} + R_{kmi j|n} + R_{nki j|m} = 0, \quad (5.45)$$

in welcher wir die Indexgruppen  $mi$  und  $jk$  kontrahieren:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{mi} g^{jk} R_{mni j|k} + g^{mi} g^{jk} R_{kmi j|n} + g^{mi} g^{jk} R_{nki j|m} \\ &= R_n^k{}_{|k} - R_{|n} + R_n^m{}_{|m} \\ &= 2R_n^k{}_{|k} - R_{|n}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Damit haben wir die Divergenz des Ricci Tensors auf die Skalare Krümmung zurückführen können:

$$R_i^k{}_{|k} = \frac{1}{2} R_{|i}. \quad (5.47)$$

Der freie Index wurde in (5.47) von  $n$  nach  $i$  umbenannt, und die horizontale Stellung des Index  $k$  braucht wegen der Symmetrie des Ricci Tensors nicht berücksichtigt zu werden.

## 5.6 Beispiel: Die zweidimensionale Kugelfläche

Interessanterweise sind die bisher als Beispiele verwendeten Polar- und Kugelkoordinaten für die Demonstration der Berechnung des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors vollkommen ungeeignet. Die durch diese Koordinatensysteme kartografierten Räume  $\mathbb{V}^2$  und  $\mathbb{V}^3$  sind nämlich ungekrümmt, weswegen der jeweils aus den Christoffelsymbolen (4.68) und (4.79) gebildete Krümmungstensor verschwindet. Dieses wird verständlich, wenn man bedenkt, daß der Krümmungstensor in jedem Koordinatensystem berechnet werden kann, also auch in einem der im  $\mathbb{V}^2$  bzw.  $\mathbb{V}^3$  erlaubten Parallelkoordinatensysteme. In einem Parallelkoordinatensystem verschwindet aber mit den Christoffelsymbolen auch der Krümmungstensor.

Die Situation ändert sich, wenn wir eine Kugelschale mit Radius  $r$  aus dem Einbettungsraum  $\mathbb{V}^3$  herauslösen und als zweidimensionale Mannigfaltigkeit betrachten. Punkte auf dieser Kugeloberfläche parametrisieren wir wie gewohnt mit den Winkeln  $\varphi$  und  $\vartheta$ . In diesen Koordinaten lautet die Metrik

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad [g^{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

und die verbleibenden Christoffelsymbole sind

$$\Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} = \cot(\vartheta) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta). \quad (5.49)$$

Für zwei Dimensionen existiert nur eine wesentliche Komponente des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors  $R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta}$ , welche wir aus dem allgemeinen Ausdruck

$$R^k_{nij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jn}^k - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{in}^k + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jn}^l - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{in}^l \quad (5.50)$$

herleiten, indem wir  $k = i = \varphi$  und  $n = j = \vartheta$  setzen:

$$\begin{aligned} R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\varphi} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\varphi} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\varphi} - \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\varphi} \Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \cot(\vartheta) - \cot^2(\vartheta) \\ &= -\left(-1 - \cot^2(\vartheta) + \cot^2(\vartheta)\right) = 1. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Den ersten Index  $\varphi$  ziehen wir mit Hilfe der Metrik (5.48) herunter, da wir so die Symmetrien des Krümmungstensors besser auswerten können:

$$R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} = g_{\varphi\varphi} R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta} = r^2 \sin^2(\vartheta). \quad (5.52)$$

Wir berechnen nun die Komponenten des Ricci Tensors durch Kontraktion des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors:

$$R_{ji} = R^k_{ikj} = g^{kl} R_{kilj}. \quad (5.53)$$

Die einzelnen Komponenten lauten:

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = g^{\vartheta\vartheta} R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} \\ &= \frac{1}{r^2} (r^2 \sin^2(\vartheta)) = \sin^2(\vartheta) \\ R_{\vartheta\vartheta} &= g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} + g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} (r^2 \sin^2(\vartheta)) = 1 \\ R_{\varphi\vartheta} &= g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi\varphi\vartheta} + g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\varphi\vartheta\vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Da der Ricci Tensor ein Tensor zweiter Stufe ist, lassen sich seine Komponenten in Matrixschreibweise zusammenfassen:

$$[R_{ij}] = \begin{pmatrix} \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Zum Abschluß berechnen wir die Skalare Krümmung durch Kontraktion des Ricci Tensors:

$$R = R^j_j = g^{ji} R_{ij}. \quad (5.56)$$

Setzen wir die Komponenten (5.54) des Ricci Tensors in (5.56) ein, erhalten wir

$$R = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} + g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} (\sin^2(\vartheta)) + \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^2}. \quad (5.57)$$

Die Skalare Krümmung der Kugeloberfläche hat somit den zweifachen Wert der Gaußschen Krümmung  $1/r^2$ . Weil in zwei Dimensionen der Riemann–Christoffelsche Krümmungstensor nur eine wesentliche Komponente besitzt, geht durch die Kontraktionen nichts verloren und der Krümmungstensor, der Ricci Tensor und die Skalare Krümmung haben denselben Informationsgehalt.

## 6 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Bisher war unsere Betrachtung gekrümmter Räume rein geometrischer Natur und nicht aufs Raum–Zeitkontinuum beschränkt. In diesem Kapitel geht es jedoch um die Herleitung der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, weshalb wir nun einige vorbereitende physikalische Aussagen treffen müssen. Wie in der Speziellen Relativitätstheorie wählen wir ab jetzt als Mannigfaltigkeit das durch die Koordinaten

$$\{x^\mu\} := \{x^0 = ct, x^1, x^2, x^3\} \quad (6.1)$$

parametrisierte vierdimensionale Raum–Zeitkontinuum. Der Metrische Tensor soll als Funktion der  $x^\mu$  in verschiedenen Raum–Zeitpunkten verschiedene Werte annehmen können und nicht notwendigerweise die Form

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

der Minkowskimetrik besitzen. In der differentiellen Umgebung jedes Raum–Zeitpunktes lassen sich jedoch lokal geodätische Koordinatensysteme finden, in denen die Metrik näherungsweise die Minkowskigestalt (6.2) annimmt, wobei dieses für gewöhnlich nur im herausgesuchten Weltpunkt exakt gilt. Dynamisch betrachtet handelt es sich um frei fallende Koordinaten, in denen lokal die Spezielle Relativitätstheorie nicht durch Gravitationseffekte gestört wird. Die gesuchten Feldgleichungen haben die Aufgabe, den Metrischen Tensor  $\mathbf{g}$  als Funktion der Raum–Zeit–Koordinaten  $x^\mu$  festzulegen, wobei die Minkowskimetrik in flachen und materiefreien Raumgebieten noch als Randbedingung in Erscheinung treten kann.

Verglichen mit der Speziellen Relativitätstheorie hat die Ortsabhängigkeit der Metrik merkwürdige Konsequenzen. Der Begriff des Inertialsystems verliert seine gewohnte Bedeutung, und gemäß Abschnitt 3.2.2 ist es nicht erlaubt, Vektoren wie z.B. Geschwindigkeiten in räumlich entfernten Punkten miteinander zu vergleichen. Dieses ist nur näherungsweise in der unmittelbaren Nachbarschaft eines Punktes möglich, in welcher das fehlende globale Inertialsystem der Speziellen Relativitätstheorie durch eine auf den jeweiligen Raumpunkt bezogene lokale Version ersetzt werden kann. In Kapitel 3 hatten wir das folgendermaßen ausgedrückt: Der globale Ortsvektorraum zerfällt in eine Vielzahl von Tangentialvektorräumen.

## 6.1 Der Energie– Impulstensor

Die klassische Mechanik beschreibt das Newtonsche Gravitationspotential als ein Feld, das die schwere Masse als Quelle besitzt. Aus der Sicht der Speziellen Relativitätstheorie ist die Masse allerdings keine eigenständige Größe sondern eine spezielle Form von Energie, was sie zu einem Bestandteil des Viererimpulses  $p^\mu$  werden läßt. Eine Feldtheorie analysiert Feldgrößen in der differentiellen Umgebung eines Raum– Zeit– Ereignisses, weswegen die Quellen der Felder in Form von Dichten vorliegen müssen. Jede Komponente des Viererimpulses wird daher durch die zugehörige Energie– bzw. Impulsdichte ersetzt und darüberhinaus durch eine Stromdichte ergänzt, welche die im Raum– Zeitkontinuum stattfindenden Zuflüsse, Abflüsse und sonstigen Umverteilungen dieser Komponente protokolliert. Eine relativistische Theorie der Gravitation kann also keine skalare und auch keine Vektorthorie sein, da die Feldquellen bereits in einem Tensor zweiter Stufe zusammengefaßt sind. Für eine korrekte Kontinuumsbeschreibung der Energie benötigen wir somit folgende physikalische Größen:

$\rho$	Energiedichte
$\underline{j}_\rho$	Stromdichte der Energie
$\pi^i$	Impulsdichte in Raumrichtung $i$
$\underline{j}_{\pi^i}$	Stromdichte der Impulskomponente $\pi^i$

Die wichtigste Eigenschaft einer durch Dichte und Stromdichte beschriebenen Größe ist die Existenz einer Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div} \underline{j}_\rho = q_\rho \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi^i + \operatorname{div} \underline{j}_{\pi^i} = q_{\pi^i} . \quad (6.4)$$

Die Terme  $q_\rho$  und  $q_{\pi^i}$  sind Quellterme, die den Gewinn oder Verlust von Energie bzw. Impuls an „artfremde“ Formen beschreiben, welche über eine geometrische Umverteilung hinausgehen. So beschreibt beispielsweise  $q_\rho$  die Dissipation von Energie während die  $q_{\pi^i}$  die Komponenten einer Kraftdichte repräsentieren. Die Energie– bzw. Impulsdichte und deren Stromdichten werden in der Speziellen Relativitätstheorie im Energie– Impulstensor  $\mathbf{T}$  zusammengefaßt:

$$\mathbf{T} = [T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & j_\rho^j/c \\ c\pi^i & j_{\pi^i}^j \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Die Komponenten dieses Tensors haben folgende physikalische Bedeutung:

$T^{00}$	Energiedichte
$T^{0j}$	Energiestromdichte, $j = \{1, 2, 3\}$
$T^{i0}$	Impulsdichte, $i = \{1, 2, 3\}$
$T^{ii}$	Druck, $i = \{1, 2, 3\}$
$T^{ij}$	Spannungen, Viskositäten, $i \neq j$ .

Durch die folgende Betrachtung wird die Interpretation der Impulsstromdichten  $T^{ii}$  als physikalische Drücke plausibel. Wir verwenden hierbei die Begriffe

$\pi^i$	Komponente $i$ der Impulsdichte
$P^i$	Komponente $i$ des Impulses
$F^i$	Komponente $i$ der Kraft
$V$	Räumliches Volumen
$\sigma_i$	Fläche senkrecht zur Raumrichtung $i$ mit $d\sigma_i = dV/dx^i$
$p^i$	Druck in Raumrichtung $i$ .

In der Kontinuumsmechanik werden Stromdichten als das Produkt eines Dichtefeldes mit seinem zugehörigen Geschwindigkeitsfeld definiert. Dieses wenden wir auf die Impulsstromdichtekomponenten  $j_{\pi^i}^i$  an und formen wie folgt um:

$$j_{\pi^i}^i = \pi^i \frac{dx^i}{dt} = \frac{dP^i}{dV} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dP^i}{dt d\sigma_i} = \frac{dF^i}{d\sigma_i} = p^i. \quad (6.6)$$

Damit ist klar, daß es sich bei den räumlichen Diagonalelementen  $T^{ii}$  des Energie–Impulstensors tatsächlich um Drücke handelt.

### 6.1.1 Symmetrie

Der Energie–Impulstensor besitzt eine Symmetrie, die man der Form (6.5) nicht unmittelbar ansieht und deren Herleitung leider ausgesprochen umständlich ist:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (6.7)$$

Leitet man nämlich den Energie– Impulstensor aus der Lagrangdichte eines gegebenen Feldes ab, ist dieser im Allgemeinen nicht symmetrisch. Allerdings wird der Tensor auf diese Weise nur bis auf ein divergenzfreies Feld bestimmt, durch dessen geeignete Wahl der Energie– Impulstensor symmetrisiert werden kann. Einfacher zu verstehen ist das physikalische Argument, daß die Erhaltung des Drehimpulses eine zusätzliche Forderung an den Energie– Impulstensor stellt. Die Drehimpulsdichte hat die Form eines Tensors dritter Stufe:

$$M^{\mu\nu\alpha} = x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}. \quad (6.8)$$

Wenn sowohl Impuls– als auch Drehimpulserhaltung gilt, verschwindet jeweils die Divergenz dieser Tensoren:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha} = 0 \quad \text{Impulserhaltung} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} M^{\mu\nu\alpha} = 0 \quad \text{Drehimpulserhaltung} \quad (6.10)$$

Der Einfachheit halber haben wir einen ungekrümmten Raum vorausgesetzt. Die Gleichungen (6.9) und (6.10) sind Impuls– bzw. Drehimpulsbilanzen mit verschwindenden Quellen. Berechnen wir nun die Drehimpulsbilanz explizit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} M^{\mu\nu\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}) \\ &= x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\nu\alpha} - x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha} + \delta_\alpha^\mu T^{\nu\alpha} - \delta_\alpha^\nu T^{\mu\alpha} \\ &= T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß laut (6.9) die Divergenz von  $\mathbf{T}$  verschwindet. Die obestehende Gleichung besagt, daß der Energie– Impulstensor symmetrisch sein muß. Betrachten wir die Konsequenzen dieser Symmetrie zunächst für die Komponenten  $T^{i0}$ :

$$T^{i0} = T^{0i} \quad \Rightarrow \quad j_\rho^i = c^2 \pi^i. \quad (6.12)$$

Damit wäre die Energiestromdichte bis auf einen Anpassungsfaktor für die Dimension mit der Impulsdichte identisch. Dieser Zusammenhang wird plausibel wenn man  $\rho$  einschränkend als reine Massendichte auffaßt. Zusätzlich zu  $\rho$  und  $\pi^i$  verwenden wir die Größen

- $v^i$  Komponente  $i$  der Geschwindigkeit
- $P^i$  Komponente  $i$  des Impulses
- $m$  Schwere Masse
- $V$  Räumliches Volumen.

Schreiben wir  $j_\rho^i$  als das Produkt von Massendichte- und Geschwindigkeitsfeld erhalten wir

$$j_\rho^i = \rho v^i = \frac{dm}{dV} v^i = \frac{dP^i}{dV} = \pi^i. \quad (6.13)$$

Durch die Interpretation von  $\rho$  als Massendichte konnten wir die elementare Definition des Impulses ausnutzen und auf die Anpassung der Dimension verzichten. Für die räumlichen Komponenten  $T^{ij}$  reproduziert die Symmetrie

$$T^{ij} = T^{ji} \quad (6.14)$$

des Energie- Impulstensors die aus der klassischen Kontinuumsmechanik bekannte Symmetrie des mechanischen Spannungstensors.

### 6.1.2 Divergenz

Die Zusammenfassung der Energie- und Impulsdichte sowie der zugehörigen Stromdichten zu einem Tensor führt zur Vereinheitlichung der Bilanzgleichungen (6.3) und (6.4):

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha} = 0. \quad (6.15)$$

Zum Beweis betrachten wir die einzelnen Zeilen dieser Tensorgleichung explizit, wobei wir den Komponenten von  $\mathbf{T}$  wieder ihren physikalischen Gehalt (6.12) zuweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{0\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^0} T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{0j} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \underline{j}_\rho \right) = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^0} T^{i0} + \frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \pi^i + \operatorname{div} \underline{j}_{\pi^i} = 0. \quad (6.17)$$

Die Divergenz des Energie– Impulstensors besteht also tatsächlich aus den vier Bilanzgleichungen (6.3) und (6.4) der Energie– Impulsdichte. Das Nichtvorhandensein von Quelltermen macht diese Bilanzgleichungen zu Erhaltungssätzen, denn wir betrachten das System der gravitierenden Materie als abgeschlossen und sehen keine Wechselwirkung mit anderen Kräften vor. Auf diese Weise können Energie und Impuls nur innerhalb des Systems umverteilt und nicht dem System hinzugefügt oder entzogen werden. Durch die Erhaltung von Energie und Impuls wird der Tensor  $\mathbf{T}$  divergenzfrei.

Bisher gilt unsere Betrachtung des Energie– Impulstensors nur für Parallelkoordinatensysteme. Interessieren wir uns stattdessen für die Verteilung von Masse, Energie und Impuls in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit, existiert der Energie– Impulstensor punktweise in Tensorräumen zweiter Stufe, die aus Instanzen der lokalen Tangentialvektorräume zusammengesetzt sind. Die partielle Ableitung muß nun durch die kovariante Ableitung ersetzt werden, und die Divergenz von  $\mathbf{T}$  lautet

$$T^{\mu\alpha}{}_{|\alpha} = 0. \quad (6.18)$$

Der Satz von Ricci erlaubt das Herauf– und Herunterziehen von Indizes in Gegenwart der kovarianten Ableitung trotz ortsabhängiger Metrik, so daß wir die Divergenz auch von den kovarianten Komponenten von  $\mathbf{T}$  bilden können:

$$T_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0. \quad (6.19)$$

Abschließend halten wir noch einmal fest, daß der Energie– Impulstensor des Gravitationsfeldes symmetrisch und divergenzfrei ist.

## 6.2 Der Einsteintensor und Einsteins Feldgleichungen

Die sich auf die Entwicklungsgeschichte der Allgemeinen Relativitätstheorie beziehenden Passagen dieses Abschnittes sind der Einsteinbiographie „Raffiniert ist der Hergott...“ [8] von Abraham Pais entnommen. Einsteins erster Schritt in Richtung einer Gravitationstheorie war die Formulierung des Äquivalenzprinzips um 1907, das sinngemäß besagt:

**Durch Beschleunigung hervorgerufene Kräfte sind von gleichgroßen  
Gravitationswirkungen ununterscheidbar.**

Ein früher quantitativer Ansatz war die skalare Theorie eines ortsabhängigen Lichtgeschwindigkeitsfeldes, mit dessen Hilfe die durch die Gravitation hervorgerufenen Richtungs– und Frequenzänderungen von Lichtstrahlen beschrieben werden sollten. Dieser

erste Versuch basierte noch auf keinem überzeugenden physikalischen Konzept, und Einstein kam der Gedanke, die Verteilung von Energie und Impuls gravitierender Materie mit der Krümmung der Raumzeit in Verbindung zu bringen. Der Versuch einer direkten Verallgemeinerung der Poissongleichung des klassischen Gravitationspotentials

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho_m \quad \rho_m: \text{Dichtefeld der gravitierenden Masse} \quad (6.20)$$

schlägt allerdings fehl, denn ersetzt man  $\Phi$  durch  $g_{\mu\nu}$ ,  $\rho_m$  durch  $T_{\mu\nu}$  und  $\Delta$  durch ein Konstrukt aus kovarianten Ableitungen, läßt der Satz von Ricci die linke Seite dieser Gleichung zu Null degenerieren. Einsteins Vorbild für die gesuchte Theorie war die Flächentheorie von Gauß, die er auf das Raum–Zeitkontinuum übertragen wollte. Im Jahr 1912 war die Differentialgeometrie kein geläufiges Werkzeug der mathematischen Physik, und er fragte seinen früheren Studienkollegen und Mathematiker Marcel Grossmann um Rat. Auch dieser mußte sich zunächst in der Universitätsbibliothek von Zürich informieren und stellte Einstein schließlich die Riemannsche Geometrie in der Form des Tensorkalküls von Ricci, Bianchi und Levy Civita vor. Eine solche Theorie hatte Einstein gesucht, und mit Unterstützung von Marcel Großmann entwickelte er die nach ihm benannten Feldgleichungen der Gravitation.

Im Gegensatz zu heute gab es damals zu diesem Thema nur wenige Übersichtsartikel, und die Informationen mußten vermutlich mühsam aus mathematischen Fachzeitschriften zusammengetragen werden. Später erweiterte Einstein Riccis Tensorkalkül durch seine Summationskonvention, die das praktische Rechnen erheblich transparenter gestaltet. Interessanterweise war ihm die Identität von Bianchi lange Zeit unbekannt, wodurch er anfangs glaubte, die neuen Feldgleichungen seien nur unter linearen Koordinatentransformationen invariant. Wir hingegen können mit den bisher bereitgestellten Hilfsmitteln Mißverständnisse dieser Art vermeiden und die Feldgleichungen auf angenehme Weise ableiten.

### 6.2.1 Der Einsteintensor

Von den Tensoren der Differentialgeometrie ist der Ricci Tensor am ehesten dazu geeignet, den Energie– Impulstensor mit geometrischen Größen in Verbindung zu bringen. Wie dieser ist er ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe, dessen Divergenz allerdings gemäß (5.47) nicht verschwindet. Wir müssen den Ricci Tensor also durch einen Term ergänzen, dessen Divergenz diejenige des Ricci Tensors aufhebt. Da der Metrische Tensor sich unter der kovarianten Ableitung wie eine Konstante verhält, kann man ihn mit einer passenden Funktion kombinieren welche die gewünschte Divergenz erzeugt. Der so modifizierte Ricci Tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6.21)$$

ist wegen des Termes mit der Skalaren Krümmung  $R$  divergenzlos. Zum Beweis bilden wir die Divergenz von  $\mathbf{G}$ :

$$\begin{aligned}
 G_{\mu}^{\alpha}{}_{|\alpha} &= R_{\mu}^{\alpha}{}_{|\alpha} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} g_{\mu\nu} R_{|\alpha} \\
 &= \frac{1}{2} R_{|\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} R_{|\alpha} \quad \Leftarrow \text{Aus (5.47)} \\
 &= \frac{1}{2} R_{|\mu} - \frac{1}{2} R_{|\mu} = 0.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Diese divergenzlose Version des Ricci Tensors trägt den Namen Einsteintensor.

### 6.2.2 Die Kosmologische Konstante

Dem Einsteintensor lassen sich weitere symmetrische divergenzlose Tensoren hinzufügen ohne daß die geänderte Version  $\mathbf{G}'$  mit dem Energie– Impulstensor unverträglich wäre. Wir machen uns wieder die Vertauschbarkeit des Metrischen Tensors mit der kovarianten Ableitung zu Nutze und wählen diesmal einen konstanten Vorfaktor:

$$G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda. \tag{6.23}$$

Die Zahl  $\Lambda$  wird **Kosmologische Konstante** genannt weil sie nicht von den Raum–Zeitkoordinaten  $x^{\mu}$  abhängt. Damit verschwindet auch wie gefordert die Divergenz dieses Zusatztermes auf triviale Weise. Das Vorzeichen wurde gemäß den Konventionen der Standardliteratur an die hier verwendete Signatur  $(+---)$  angepaßt.

### 6.2.3 Die Feldgleichungen

Durch Gleichsetzen des Einsteintensors mit dem Energie– Impulstensor entsteht ein System nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung für das Feld des Metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}(x^0 \cdots x^3)$ . Dieser hat 10 wesentliche Komponenten, für die 10 Differentialgleichungen zur Verfügung stehen. Ein Vorfaktor vor dem Energie– Impulstensor korrigiert die Dimension und reproduziert im Grenzfall des flachen nichtrelativistischen Raumes das Newtonsche Gravitationsgesetz. Fassen wir alle geometrischen Anteile auf der linken Seite der Gleichung zusammen, erhalten wir

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi}{c^4} G T_{\mu\nu}, \tag{6.24}$$

wobei  $G$  für die Gravitationskonstante steht:

$$G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} . \quad (6.25)$$

Einstein empfand diese Form der Feldgleichungen zunächst als problematisch, denn die linke Seite von (6.24) ist gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen form-invariant. Die 10 Differentialgleichungen scheinen die 10 Komponenten des Metrischen Tensors nach der Aufstellung geeigneter Anfangs- und Randbedingungen vollständig festzulegen, so daß eine Änderung der  $g_{\mu\nu}$  durch frei wählbare Koordinaten unterbunden wird. Einstein glaubte daher, die Feldgleichungen seien nur in Parallelkoordinatensystemen gültig, weswegen sich ein Wechsel des Koordinatensystems auf lineare Transformationen beschränkt hätte. Dieses wäre allerdings ein ernstzunehmender Mangel seiner Theorie gewesen. Tatsächlich sind die 10 Differentialgleichungen jedoch voneinander abhängig, weil die durch die Identität von Bianchi garantierte Divergenzfreiheit der linken Seite von (6.24) die 10 Feldgleichungen über vier zusätzliche differentielle Beziehungen miteinander koppelt. Es bleiben also nur noch 6 unabhängige Feldgleichungen übrig, wodurch 4 Koordinatenfunktionen beliebig wählbar sind. Damit sind die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der Darstellung des Metrischen Tensors in beliebigen Koordinatensystemen verträglich.

In der Form (6.24) enthalten die Feldgleichungen der Gravitation auch die Kosmologische Konstante  $\Lambda$ , welche Einstein eingeführt hatte, um den damaligen Vorstellungen von der Struktur des Universums entsprechende stationäre Lösungen zuzulassen. Als Edwin Hubble in den Zwanziger Jahren entdeckte, daß das Universum expandiert, nannte Einstein die Einführung der Kosmologischen Konstante seine „größte Eselei“, da er auf diese Weise die Gelegenheit verpaßt hatte, noch vor Hubbles Veröffentlichung den dynamischen Charakter des Universums vorherzusagen. Heutzutage erfreut sich die Kosmologische Konstante im Hinblick auf die Dunkle Energie erneuter Beliebtheit. Häufig wird dieser Zusatzterm auf die rechte Seite der Feldgleichungen geschrieben und als Druck und Energiedichte des Vakuums interpretiert:

$$T_{\mu\nu}^{\text{vac}} = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (6.26)$$

Dieser spezielle Energie- Impulstensor des Vakuums hat in lokal frei fallenden Bezugssystemen vier Diagonalelemente, die sich bei gleichem Betrag nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Berücksichtigt man die Bedeutung dieser Elemente

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho && \text{(Energiedichte)} \\ T_{ii} &= p && \text{(Druck)} , \end{aligned}$$

kann man aus (6.26) die sogenannte Zustandsgleichung  $\rho(p)$ , also den Zusammenhang zwischen Energiedichte und Druck dieser „Materie des Vakuums“ ablesen:

$$\rho^{\text{vac}} = -p^{\text{vac}} = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}. \quad (6.27)$$

Die geläufigere Form der Feldgleichungen enthält  $\Lambda$  allerdings nicht, und es ist üblich, den Vorfaktor vor dem Energie– Impulstensor abkürzend als  $\kappa$  zu bezeichnen oder auch ganz wegzulassen:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (6.28)$$

Eine abgewandelte Form der Feldgleichungen ergibt sich durch Spurbildung auf beiden Seiten von (6.24):

$$\begin{aligned} \kappa T^\alpha{}_\alpha &= R^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_\alpha R - \delta^\alpha{}_\alpha \Lambda \\ \kappa T &= -R - 4\Lambda, \end{aligned} \quad (6.29)$$

wobei wir die oben erwähnte Abkürzung

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^4} G \quad (6.30)$$

verwendet haben. Die Beziehung (6.29) erlaubt es, in den Feldgleichungen (6.24) den Krümmungsskalar  $R$  durch die Spur  $T$  des Energie– Impulstensors zu ersetzen:

$$R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi}{c^4} G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (6.31)$$

Sieht man von der Kosmologischen Konstante ab, wird in (6.31) der Ricci Tensor selbst durch den Energie– Impulstensor ausgedrückt. Auf diese Weise können die Auswirkungen der Verteilung von Energie und Impuls der gravitierenden Materie auf die geometrische Struktur des Raumes in anschaulicherer Weise interpretiert werden, als dies in der ursprünglichen Darstellung der Fall ist [20].

Schließlich bleibt noch zu erwähnen, daß die Formulierung der Einsteinschen Feldgleichungen in der Literatur alles andere als einheitlich ist. Neben der Tendenz zu sog. natürlichen Einheiten  $G = 1$ ,  $c = 1$  oder gar  $\kappa = 1$  existieren in Abhängigkeit von der Definition des Riemann– Christoffelschen Krümmungstensors und des Metrischen

Tensors verschiedene Vorzeichenkonventionen. So können fast alle Terme in den Feldgleichungen unterschiedliche Vorzeichen haben wie z.B.

$$R^k{}_{nij} \rightarrow -R^k{}_{nij} :$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = -\kappa T_{\mu\nu} . \quad (6.32)$$

Wählt man für die Metrik die komplementäre Signatur  $(-+++)$ , ändert sich nur das Vorzeichen des Terms mit der Kosmologischen Konstante. Auch der Vorfaktor  $\kappa$  unterscheidet sich, wenn beispielsweise die Einheit des Energie– Impulstensors nicht als Energiedichte sondern als Massendichte interpretiert wird oder wenn natürliche Einheiten ins Spiel kommen. Häufig anzutreffende Formen sind:

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^2}G \quad (\text{Durch } \rho \rightarrow \rho/c^2) \quad (6.33)$$

$$\kappa = 8\pi G \quad (\text{Durch } c = 1) \quad (6.34)$$

$$\kappa = 8\pi \quad (\text{Durch } G = 1 \text{ und } c = 1). \quad (6.35)$$

Liegt eine alternative Form dieser Art vor, ist es ratsam, deren Herkunft anhand der obengenannten Ursachen zurückzuverfolgen.

#### 6.2.4 Linearisierung und Newtonscher Grenzfall

Ähnlich wie die Quantenmechanik für  $\hbar \rightarrow 0$  in die klassische Mechanik übergeht, muß die Allgemeine Relativitätstheorie im nichtrelativistischen Grenzfall Newtons Gravitationsgesetz in Gestalt der Feldgleichung (6.20) reproduzieren. Die hier vorgestellte Rechnung basiert auf einer Kombination aus Lehrbuchstoff [7] und den Methoden eines in *arXiv.org* veröffentlichten Vorlesungsscriptes [4]. Den Newtonschen Grenzfall erhält man aus Einsteins Felgleichungen durch Approximationen in folgenden Bereichen:

Schwachfeldnäherung:

Die Metrik darf nur wenig von der Minkowskimetrik abweichen:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1 . \quad (6.36)$$

Die  $\eta_{\mu\nu}$  in (6.36) sind die in einem kartesischen Koordinatensystem ausgedrückten Koeffizienten der ungestörten Minkowskimetrik

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Strenggenommen sollte man ebenfalls voraussetzen, daß die Kleinheit der Amplituden  $h_{\mu\nu}$  nicht durch große Schwankungen in sehr kleinen Raum– Zeitbereichen konterkariert wird. Diese könnten nämlich die partiellen Ableitungen  $\partial h_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$  so stark anwachsen lassen, dass deren Linearisierung zusammenbricht.

#### Nichtrelativistischer Grenzfall:

Da das Newtonsche Gravitationsgesetz keine relativistische Theorie ist, muß die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß angenommen werden:

$$c \rightarrow \infty. \quad (6.38)$$

Dieser Grenzübergang läßt alle Retardierungseffekte verschwinden, und die Bewegung der Quellen wirkt sich instantan auf das metrische Feld aus.

#### Statisches Feld:

Im Gegensatz zum elektromagnetischen Feld hat das Newtonsche Gravitationsfeld keine dynamischen Anteile und wird nur parametrisch mit den sich bewegenden Quellen mitgeführt. Die Abweichungen  $h_{\mu\nu}$  von der Minkowskimetrik sind somit zeitunabhängig:

$$\frac{\partial}{\partial x^0} h_{\mu\nu} = 0. \quad (6.39)$$

In einem ersten Schritt linearisieren wir die Christoffelsymbole in den Größen  $h_{\mu\nu}$ , indem wir den Ansatz (6.36) in Gleichung (4.32) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa &= \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} g_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} h_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_{\mu\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} h_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Diese linearisierten Christoffelsymbole erlauben die Berechnung des linearisierten Ricci Tensors, vgl (5.5):

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R^{\kappa}_{\mu\kappa\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\kappa}_{\kappa\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\kappa\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\mu} \\
&\approx \frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} h_{\nu\lambda} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} h_{\kappa\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h_{\kappa\lambda} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} h_{\mu\nu} \right). \quad (6.41)
\end{aligned}$$

In zwei Termen können wir eigene Ausdrücke für die Spur der  $h_{\mu\nu}$  und den D'Alembert-Operator  $\square$  einführen:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (6.42)$$

$$\square = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (6.43)$$

In diesen Größen geschrieben lautet der linearisierte Ricci Tensor

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} \eta^{\kappa\lambda} h_{\lambda\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\nu} \partial x^{\kappa}} \eta^{\kappa\lambda} h_{\lambda\mu} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} h - \square h_{\mu\nu} \right). \quad (6.44)$$

Um die Skalare Krümmung in der gleichen Näherung zu berechnen, muß der linearisierte Ricci Tensor aus (6.44) mit  $\eta^{\mu\nu}$  anstatt mit  $g^{\mu\nu}$  überschoben werden:

$$R \approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} h_{\kappa\lambda} - \square h. \quad (6.45)$$

Hierbei wurden die Summationsindizes  $\mu \leftrightarrow \kappa$  beziehungsweise  $\nu \leftrightarrow \lambda$  wechselseitig umbenannt. Bevor wir nun die Schwachfeldnäherung des Einsteintensors

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \quad (6.46)$$

aus den obenstehenden Näherungen für  $R_{\mu\nu}$  und  $R$  konstruieren, betrachten wir zunächst dessen Spur:

$$G := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -R. \quad (6.47)$$

Offenbar unterscheidet sich die Spur des Einsteintensors von der Spur des Ricci Tensors nur durch das Vorzeichen. In der angloamerikanischen Literatur werden symmetrische

Tensoren, die über diese Eigenschaft miteinander in Beziehung stehen, als zueinander **trace – reversed** bezeichnet und mit einem Überstrich geschrieben:

$$G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (6.48)$$

Es überrascht nicht, daß der linearisierte Einsteintensor eine einfachere Gestalt annimmt, wenn wir statt der Störungskoeffizienten  $h_{\mu\nu}$  deren trace – reversed Versionen verwenden:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h. \quad (6.49)$$

Wir schreiben daher einige Ausdrücke aus den linearisierten Versionen des Ricci Tensors (6.44) und der Skalaren Krümmung (6.45) als Funktionen der  $\bar{h}_{\mu\nu}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \eta^{\kappa\lambda} h_{\lambda\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \eta^{\kappa\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} h_{\kappa\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\lambda} \bar{h}_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2} \square h \quad (6.51)$$

$$\square h_{\mu\nu} = \square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h. \quad (6.52)$$

Setzen wir dieses in (6.44) und (6.45) ein, lautet der linearisierte Einsteintensor

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} \eta^{\kappa\lambda} \bar{h}_{\lambda\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} \eta^{\kappa\lambda} \bar{h}_{\lambda\mu} - \dots \right. \\ \left. \dots - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \eta^{\rho\kappa} \eta^{\sigma\lambda} \bar{h}_{\kappa\lambda} - \square \bar{h}_{\mu\nu} \right). \quad (6.53)$$

Wenn sich auch die Zahl der Terme durch die Einführung der  $\bar{h}_{\mu\nu}$  von 6 auf 4 reduziert hat, ist die Form (6.53) für eine einfache Interpretation noch zu unübersichtlich. Allerdings legen die Einsteinschen Feldgleichungen wie in Abschnitt 6.2.3 erwähnt den Metrischen Tensor nur bis auf vier Koordinatenfunktionen

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu) \quad (6.54)$$

fest, weswegen sich der linearisierte Einsteintensor durch die Beschränkung auf eine geeignete Klasse von Koordinatensystemen weiter vereinfachen läßt. Die Situation

ist analog zur Herleitung der Wellengleichung des elektromagnetischen Feldes, deren Struktur ebenfalls erst zu erkennen ist, wenn die Eichfreiheit der Potentiale durch die Lorenzgleichung eliminiert wird. In unserem Fall beschränken wir die zugelassenen Koordinatenfunktionen auf harmonische Funktionen mit der Eigenschaft

$$\square x^\mu := g^{\kappa\lambda} x^\mu{}_{|\kappa|\lambda} = 0. \quad (6.55)$$

Diese Auswahl wird als **Harmonische Eichung** bezeichnet. Der Operator  $\square$  ist die kovariante Form des in (6.43) eingeführten D'Alembert-Operators  $\square$ , in welchem die partiellen durch kovariante Ableitungen ersetzt wurden. Bei der Auswertung dieser Eichbedingung ist zu beachten, daß es sich bei den Koordinaten  $x^\mu$  trotz ihrer Indizierung nicht um Vektorkomponenten sondern um einfache Zahlentupel handelt, die bei der kovarianten Differentiation wie skalare Funktionen zu behandeln sind:

$$x^\mu{}_{|\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} x^\mu = \delta_\kappa^\mu \quad (6.56)$$

$$x^\mu{}_{|\kappa|\lambda} = \frac{\partial^2}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} x^\mu - \Gamma_{\kappa\lambda}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} x^\mu = -\Gamma_{\kappa\lambda}^\mu \quad (6.57)$$

$$g^{\kappa\lambda} x^\mu{}_{|\kappa|\lambda} = -g^{\kappa\lambda} \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} g^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g_{\sigma\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\sigma\kappa} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\kappa\lambda} \right). \quad (6.58)$$

Wir betrachten nun die Harmonische Eichung in Schwachfeldnäherung:

$$\begin{aligned} \square x^\mu &= -g^{\kappa\lambda} \Gamma_{\kappa\lambda}^\mu \approx -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \eta^{\mu\sigma} \left( \frac{\partial}{\partial x^\kappa} h_{\sigma\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda} h_{\sigma\kappa} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} h_{\kappa\lambda} \right) \\ &= -\eta^{\mu\sigma} \left( \eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} h_{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} h \right) \\ &= -\eta^{\mu\sigma} \left( \eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} h_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \eta^{\kappa\lambda} \eta_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} h \right) \quad \Leftarrow \eta^{\kappa\lambda} \eta_{\lambda\sigma} = \delta_\sigma^\kappa \\ &= -\eta^{\mu\sigma} \eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( h_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} \eta_{\lambda\sigma} h \right) \\ &= -\eta^{\mu\sigma} \eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \bar{h}_{\lambda\sigma} = 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Durch Linksmultiplikation mit  $[\eta_{\mu\nu}]$  erhält die Bedingung (6.59) wie die Lorenzgleichung

der Elektrodynamik die Gestalt einer Divergenz:

$$\eta^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \bar{h}_{\lambda\nu} = 0. \quad (6.60)$$

Beschränken wir uns in (6.53) auf harmonische Koordinaten, verschwinden dort die ersten drei Terme und wir erhalten

$$G_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (6.61)$$

Die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen entkoppeln somit komponentenweise und erhalten die Form von inhomogenen Wellengleichungen:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{c^4} G T_{\mu\nu}. \quad (6.62)$$

Diese Dynamik des schwach gestörten metrischen Feldes hat weitreichende physikalische Konsequenzen:

– *Gravitationswellen:*

Im Vakuum  $T_{\mu\nu} = 0$  beschreiben die Gleichungen (6.62) die wellenartige Ausbreitung einer Störung  $\bar{h}_{\mu\nu}$  um die Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$ . Mit  $x^0 = ct$  lautet der D'Alembert-Operator

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (6.63)$$

woraus sich  $c$  als Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Störungen ablesen läßt. Es handelt sich somit um die von Einstein vorhergesagten Gravitationswellen.

– *Retardierung:*

Die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen (6.62) haben dieselbe Gestalt wie die Wellengleichungen des elektromagnetischen Viererpotentials, deren Quellen allerdings nicht Komponenten einer Viererstromdichte sondern die Komponenten des Energie-Impulstensors sind. Tritt in der Energie-Impulsverteilung (Masse, Druck, Scherungen usw.) eine Veränderung auf, teilt sich diese dem metrischen Feld nicht instantan mit sondern wird wie Störungen des elektromagnetischen Feldes mit Lichtgeschwindigkeit zu entfernten Raumpunkten propagiert.

Den nichtrelativistischen Grenzfall dieser linearisierten Feldgleichungen erhalten wir, indem wir die Lichtgeschwindigkeit mit  $c \rightarrow \infty$  als unendlich groß annehmen. In diesem

Limes dominiert die Komponente  $T_{00}$  und es bleibt nur eine relevante Feldgleichung übrig:

$$\square \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi}{c^4} G T_{00}. \quad (6.64)$$

Im Rahmen der nichtrelativistischen Näherung können wir schreiben:

$$\square \stackrel{c \rightarrow \infty}{\approx} -\Delta \quad (6.65)$$

$$T_{00} = \rho =: c^2 \rho_m. \quad (6.66)$$

Hierbei ist  $\rho_m$  die aus der Energiedichte  $\rho$  abgeleitete Massendichte. Für einen direkten Vergleich dieser Ausdrücke mit dem klassischen Gravitationsfeld können wir zusätzlich  $\rho_m$  und  $\bar{h}_{00}$  als unabhängig von der Zeitkoordinaten  $x^0$  annehmen, denn die Newtonsche Gravitationskraft ist bei ruhenden Massendichten ebenfalls statisch. Unabhängig von dieser zusätzlichen Forderung lautet die nichtrelativistische Approximation der Feldgleichungen

$$\Delta \bar{h}_{00} = \frac{16\pi}{c^2} G \rho_m. \quad (6.67)$$

Die Gegenüberstellung von (6.67) mit der klassischen Feldgleichung für das Newtonsche Gravitationspotential

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho_m \quad (6.68)$$

bestätigt das Auftreten der Gravitationskonstante  $G$  auf der rechten Seite der Einsteinschen Feldgleichungen und erlaubt uns,  $\bar{h}_{00}$  durch das Potential  $\Phi$  auszudrücken:

$$\bar{h}_{00} = \frac{4}{c^2} \Phi. \quad (6.69)$$

Um auch die Abhängigkeit der ursprünglichen Störungskoeffizienten  $h_{\mu\nu}$  von  $\Phi$  zu ermitteln betrachten wir zunächst die Spur  $h$  als Funktion der  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Da diese die trace-reversed-Version der  $h_{\mu\nu}$  sind, erhalten wir

$$h = -\bar{h} \stackrel{c \rightarrow \infty}{\approx} -\bar{h}_{00} \quad (6.70)$$

und die Störungskoeffizienten  $h_{\mu\nu}$  lauten somit

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \\ &\stackrel{c \rightarrow \infty}{\approx} \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{00}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

In einem kartesischen Koordinatensystem wird Gleichung (6.71) zu

$$h_{00} \approx \bar{h}_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} \bar{h}_{00} = \frac{2}{c^2} \Phi \quad (6.72)$$

$$h_{ii} \approx -\frac{1}{2} \eta_{ii} \bar{h}_{00} = \frac{2}{c^2} \Phi, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.73)$$

womit wir schließlich die Koeffizienten der schwach gestörten Minkowskimetrik selbst angeben können:

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2} \Phi \quad (6.74)$$

$$g_{ii} = -1 + \frac{2}{c^2} \Phi, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.75)$$

Damit erhält das Linienelement der Allgemeinen Relativitätstheorie in Newtonscher Näherung und in kartesischen Koordinaten die Form

$$ds^2 = (c^2 + 2\Phi) dt^2 - \sum_{i=1}^3 dx^{i2}, \quad (6.76)$$

worin nur die führende Ordnung der  $g_{ii}$  berücksichtigt wurde. Die Linearisierung der Einsteinschen Feldgleichungen für schwache Gravitationsfelder hat zu zwei wichtigen Resultaten geführt. Wir haben gezeigt, daß die Newtonsche Gravitationstheorie als Spezialfall nichtrelativistischer schwacher Felder in der Allgemeinen Relativitätstheorie enthalten ist und konnten somit das in der Überschrift dieses Abschnittes gesteckte Ziel erreichen. Darüberhinaus haben wir festgestellt, daß schwache Gravitationsfelder Lösungen einer Wellengleichung sind, weshalb Änderungen in der Energie– Impulsverteilung der Metrik mit Lichtgeschwindigkeit mitgeteilt werden. Im Vakuum handelt es sich bei diesen Schwachfeldlösungen um die von Einstein vorhergesagten Gravitationswellen.

## 6.3 Die Einstein– Hilbert– Wirkung

Gegen Ende des Jahres 1915 gelang es dem Mathematiker David Hilbert die „Geometrieseite“ der Feldgleichungen (6.24) aus einem Variationsverfahren abzuleiten. Seine Publikation fand beinahe zeitgleich mit Einsteins Veröffentlichung statt und führte zu einer kurzzeitigen Verstimmung zwischen den beiden Wissenschaftlern, welche die sich abzeichnende Gravitationstheorie zuvor in einem Briefwechsel diskutiert hatten. Trotz bis heute andauernder Spekulationen hat Hilbert jedoch niemals einen Prioritätsanspruch gegenüber Einstein geltend gemacht, der nach Auffassung der Mehrheit heutiger Wissenschaftshistoriker auch nicht haltbar wäre. Die Herleitung der Feldgleichungen aus einem Wirkungsprinzip spielt sowohl bei der Einbettung der Allgemeinen Relativitätstheorie in Eich– oder Stringtheorien als auch bei Quantisierungsansätzen für das Gravitationsfeld eine wichtige Rolle. Bevor wir jedoch dieses Variationsprinzip und die zugehörige Lagrangedichte vorstellen können, müssen wir zunächst einige technische Details besprechen. Abgesehen von ein paar ergänzenden Informationen aus verschiedenen Internetforen entspricht die folgende Darstellung der einschlägigen Literatur [6] [7].

Die gesuchte Wirkung  $S_H$  ist das Integral der noch zu bestimmenden Lagrangedichte  $\mathcal{L}_H$  über einen vierdimensionalen Raum– Zeitbereich  $W$

$$S_H(\mathbf{g}) = \int_W \mathcal{L}_H\left(\mathbf{g}''(x^0 \cdots x^3), \mathbf{g}'(x^0 \cdots x^3), \mathbf{g}(x^0 \cdots x^3)\right) d^4x, \quad (6.77)$$

wobei  $S_H$  als Funktion der Koeffizienten  $g_{\mu\nu}$  des Metrischen Tensors aufgefaßt und entsprechend variiert wird. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_H$  enthält Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  nach den Raum– Zeitkoordinaten bis zur zweiten Ordnung, welche wir abkürzend mit ' bzw. '' bezeichnet haben. Wie üblich wird die Variation an den Rändern des Gebietes  $W$  festgehalten und verschwindet dort. Die Wahl der  $g_{\mu\nu}$  als Variablen hat zur Folge, daß wir dem Volumenelement  $d^4x$  besondere Aufmerksamkeit schenken müssen, denn dieses hängt auf versteckte Weise ebenfalls von der Metrik ab.

### 6.3.1 Das vierdimensionale Volumenelement

In Kapitel 3 haben wir die Eigenschaften einer Koordinatenbasis diskutiert, die mit den Koordinatenlinien mitbewegt wird und sich somit von Punkt zu Punkt ändert. Bezeichnen wir die Basisvektoren in einem bestimmten Raum– Zeitpunkt mit  $\underline{u}_\mu$  und bedenken, daß der Ausdruck  $\underline{u}_\mu dx^\mu$  (keine Summation hier) das Linienelement an die  $\mu$ -te Koordinatenlinie darstellt, dann läßt sich das Volumenelement folgendermaßen konstruieren:

$$\begin{aligned}
(dx^4)^2 &= |(\underline{u}_\mu dx^\mu \cdot \underline{u}_\nu dx^\nu)| & (6.78) \\
&= |(\underline{u}_\mu \cdot \underline{u}_\nu)| (dx^0 \cdots dx^4)^2 = |g_{\mu\nu}| (dx^0 \cdots dx^4)^2.
\end{aligned}$$

Auch hier wird in der ersten Zeile nicht automatisch summiert, vielmehr sind  $\mu$  und  $\nu$  die Indizes von Matrixelementen aus denen die Determinante gebildet wird. Im zweiten Schritt wurden die Differentiale  $dx^\mu$  zeilen- und spaltenweise vor die Determinante gezogen. Das Volumenelement selbst lautet also

$$dx^4 = \sqrt{-|g|} dx^0 \cdots dx^4, \quad (6.79)$$

wobei das Minuszeichen unter der Wurzel verhindert, daß die durch die Signatur vorgegebene negative Determinante der Raum- Zeit- Metrik das Volumenelement imaginär macht. Diese Darstellung des Volumeninhaltes wird auf hübsche Weise durch das einfache Beispiel des Flächeninhaltes eines durch die beiden Vektoren  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  aufgespannten Parallelogramms verständlich. Mit den Bezeichnungen

- $a_1$     Länge von  $\underline{a}_1$
- $a_2$     Länge von  $\underline{a}_2$
- $\varphi$     Winkel zwischen den Vektoren
- $A$     Fläche des Parallelogramms

können wir diesen Flächeninhalt folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left( a_1 a_2 \sin(\varphi) \right)^2 = a_1^2 a_2^2 \left( 1 - \cos^2(\varphi) \right) \\
&= (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1)(\underline{a}_2 \cdot \underline{a}_2) - (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2)^2 & (6.80) \\
&= |(\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j)|.
\end{aligned}$$

Diese leicht nachvollziehbare Rechnung führt uns zu dem in beliebigen Dimensionen gültigen Resultat, daß die aus den Skalarprodukten der Seiten- bzw. Kantenvektoren gebildete Determinante das Quadrat des Rauminhaltes beschreibt.

### 6.3.2 Variation von $|\mathbf{g}|$

Es wird sich herausstellen, daß die Variation der Wirkungsfunktion  $S_H$  entlang der Komponenten  $g^{\mu\nu}$  des inversen Metrischen Tensors praktikabler ist als entlang der Komponenten  $g_{\mu\nu}$  des Metrischen Tensors selbst. Als Elemente einer inversen Matrix lassen sich die  $g^{\mu\nu}$  aus der Determinante und der Adjunkten von  $\mathbf{g}$  konstruieren:

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{|\mathbf{g}|} \text{Adj } \mathbf{g}(\mu, \nu) . \quad (6.81)$$

Die Adjunkte einer Matrix enthält diejenigen Unterdeterminanten  $M_{\mathbf{g}}(\mu, \nu)$ , die durch Streichung der  $\mu$ -ten Zeile und der  $\nu$ -ten Spalte entstehen:

$$\text{Adj } \mathbf{g}(\mu, \nu) = (-1)^{\mu+\nu} M_{\mathbf{g}}(\mu, \nu) . \quad (6.82)$$

Die Ableitung der Determinante nach einer bestimmten Komponente lautet somit

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} |\mathbf{g}| = \text{Adj } \mathbf{g}(\mu, \nu) = |\mathbf{g}| g^{\mu\nu} , \quad (6.83)$$

was leicht einzusehen ist, wenn die Determinante  $|\mathbf{g}|$  nach der  $\mu$ -ten Zeile entwickelt wird. Keine der dabei entstehenden Unterdeterminanten enthält das Element  $g_{\mu\nu}$ , welches nur als Vorfaktor eines einzigen Summanden auftritt. Die obenstehende Gleichung ist für beliebige invertierbare Matrizen gültig, und somit können wir sie auch auf den inversen Metrischen Tensor anwenden. Hierbei ersetzen wir in (6.83)

$$|\mathbf{g}| \Rightarrow 1/|\mathbf{g}|$$

$$g_{\mu\nu} \Rightarrow g^{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} \Rightarrow g_{\mu\nu}$$

und erhalten als Resultat

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \frac{1}{|\mathbf{g}|} = -\frac{1}{|\mathbf{g}|^2} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} |\mathbf{g}| = \frac{1}{|\mathbf{g}|} g_{\mu\nu} . \quad (6.84)$$

Wir fassen die Ableitung von  $|\mathbf{g}|$  nach den Komponenten  $g_{\mu\nu}$  bzw.  $g^{\mu\nu}$  mit Hilfe von (6.83) und dem rechten Teil von (6.84) noch einmal zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} |\mathbf{g}| = |\mathbf{g}| g^{\mu\nu} \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} |\mathbf{g}| = -|\mathbf{g}| g_{\mu\nu}. \quad (6.86)$$

Für die Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen aus dem Hilbertschen Variationsprinzip muß der aus dem Volumenelement  $d^4x$  stammende Wurzelfaktor  $\sqrt{-|\mathbf{g}|}$  ebenfalls variiert werden. Geschieht diese Variation entlang der Komponenten  $g^{\mu\nu}$ , entsteht mit Hilfe von (6.86) der folgende Ausdruck:

$$\delta\sqrt{-|\mathbf{g}|} = -\frac{1}{2\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \delta|\mathbf{g}| = -\frac{1}{2}\sqrt{-|\mathbf{g}|} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (6.87)$$

### 6.3.3 Hilberts Lagrangedichte

Die Lagrangedichte für die Einsteinschen Feldgleichungen muß ein relativistisch kovarianter Skalar sein, der Ableitungen der  $g_{\mu\nu}$  nach den Koordinaten bis zur zweiten Ordnung enthält. Die Ableitungen erster Ordnung können in jedem Punkt des Raum-Zeitkontinuums durch ein frei fallendes Koordinatensystem zum Verschwinden gebracht werden und sind somit als Träger von Informationen über die Raum-Zeitstruktur nicht ausreichend. Der einzige Skalar ohne Ableitungen höherer Ordnung ist die Skalare Krümmung  $R$ , welche wir noch um ein Glied zur Berücksichtigung der Kosmologischen Konstante erweitern. Mit diesem Zusatzterm lautet Hilberts Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_H = R + 2\Lambda. \quad (6.88)$$

In den zu variierenden Ausdruck geht auch der von der Metrik abhängige Teil des Volumenelementes mit ein:

$$\sqrt{-|\mathbf{g}|} \mathcal{L}_H = \sqrt{-|\mathbf{g}|} (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + 2\Lambda). \quad (6.89)$$

Die Variation von Hilberts Lagrangedichte liefert unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 6.3.2 das folgende Resultat:

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{-|\mathbf{g}|} \mathcal{L}_H\right) &= -\frac{1}{2}\sqrt{-|\mathbf{g}|} g_{\mu\nu} \left(R + 2\Lambda\right) \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-|\mathbf{g}|} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
&+ \sqrt{-|\mathbf{g}|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\
&= \sqrt{-|\mathbf{g}|} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda\right) \delta g^{\mu\nu} \\
&+ \sqrt{-|\mathbf{g}|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Interessanterweise erscheint in (6.90) bereits die vollständige Geometrieseite der Feldgleichungen, weswegen die noch zu betrachtende Variation des Ricci Tensors keinen weiteren Beitrag zur Gesamtvariation des Wirkungsintegrals (6.77) liefern darf.

#### 6.3.4 Variation des Ricci Tensors

Um den Ricci Tensor entlang der  $g^{\mu\nu}$  variieren zu können schreiben wir diesen ausgehend von der Definition des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors (5.5) noch einmal explizit hin:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\kappa\mu}^\kappa + \Gamma_{\kappa\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\rho. \tag{6.91}$$

Führen wir die Variation durch, erhalten wir

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\kappa \tag{6.92}$$

$$\begin{aligned}
&+ \delta \Gamma_{\kappa\rho}^\kappa \Gamma_{\nu\mu}^\rho + \Gamma_{\kappa\rho}^\kappa \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \delta \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \Gamma_{\kappa\mu}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\rho \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \Gamma_{\kappa\mu}^\rho \delta \Gamma_{\nu\rho}^\kappa + \Gamma_{\kappa\rho}^\kappa \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\kappa\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\kappa
\end{aligned} \tag{6.93}$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{\partial}{\partial x^\nu} \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\kappa + \Gamma_{\nu\mu}^\rho \delta \Gamma_{\kappa\rho}^\kappa - \Gamma_{\nu\rho}^\kappa \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\rho + \Gamma_{\kappa\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\kappa \\
&= \delta \Gamma_{\nu\mu|\kappa}^\kappa - \delta \Gamma_{\kappa\mu|\nu}^\kappa.
\end{aligned} \tag{6.94}$$

Im Schritt (6.93) haben wir nach Umordnung der Terme einen zusätzlichen Beitrag  $\Gamma_{\kappa\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\kappa$  redundant mit positivem und negativem Vorzeichen hinzugefügt und konn-

ten damit zwei kovariante Ableitungen vervollständigen. Nun überschieben wir den Ausdruck (6.94) mit dem Metrischen Tensor

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu|\kappa}^{\kappa} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\kappa\mu|\nu}^{\kappa} \\
&= \left( g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - g^{\mu\kappa} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho} \right)_{|\kappa} \\
&=: \delta w^{\kappa}_{|\kappa},
\end{aligned} \tag{6.95}$$

wobei wir im zweiten Summand der mittleren Zeile geeignete Umbenennungen der Summationsindizes vorgenommen haben. Wie man an (6.95) sehen kann, reduziert sich die Variation des Ricci Tensors auf die Divergenz eines Vektorfeldes  $\delta w^{\kappa}$ :

$$\delta w^{\kappa} := g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - g^{\mu\kappa} \delta \Gamma_{\rho\mu}^{\rho}. \tag{6.96}$$

Explizit ausgeschrieben lautet diese Divergenz

$$\delta w^{\kappa}_{|\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \delta w^{\kappa} + \Gamma_{\kappa\rho}^{\kappa} \delta w^{\rho}. \tag{6.97}$$

Die hier auftretenden kontrahierten Christoffelsymbole  $\Gamma_{\kappa\rho}^{\kappa}$  lassen sich vereinfachen

$$\Gamma_{\kappa\rho}^{\kappa} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\rho\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\kappa\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} g_{\kappa\rho} \right) = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\kappa\lambda}, \tag{6.98}$$

denn der erste und der dritte Summand heben sich nach Umbenennung der Summationsindizes weg. Die Komponenten  $g^{\kappa\lambda}$  des inversen Metrischen Tensors schreiben wir nun mit Hilfe von (6.83) als Funktion der Determinante  $|\mathbf{g}|$ :

$$\Gamma_{\kappa\rho}^{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{g}|} \frac{\partial}{\partial g_{\kappa\lambda}} |\mathbf{g}| \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} g_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{g}|} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} |\mathbf{g}| = \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \sqrt{-|\mathbf{g}|}. \tag{6.99}$$

Mit dieser Darstellung der Christoffelsymbole lautet die Divergenz (6.97):

$$\begin{aligned}
\delta w^{\kappa}_{|\kappa} &= \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \delta w^{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \sqrt{-|\mathbf{g}|} \delta w^{\kappa} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left( \sqrt{-|\mathbf{g}|} \delta w^{\kappa} \right).
\end{aligned} \tag{6.100}$$

Der gesamte von der Variation des Ricci Tensors abhängige Ausdruck der Lagrange-dichte erhält also die Form

$$\sqrt{-|\mathbf{g}|} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left( \sqrt{-|\mathbf{g}|} \delta w^\kappa \right). \quad (6.101)$$

Dieses ist die gewöhnliche (nicht kovariante) Divergenz eines Vektorfeldes, welche innerhalb des Wirkungsintegrals dem Satz von Gauß entsprechend in ein Integral über den Rand des betrachteten Gebietes  $W$  umgewandelt werden kann. Da aber nach Voraussetzung die Variation dort verschwindet, trägt der gesamte Ausdruck nicht zur Variation der Wirkung  $S_H$  bei.

### 6.3.5 Ableitung der Feldgleichungen

Nachdem das Verschwinden des letzten Termes in (6.90) gesichert ist, können wir aus der Variation der Hilbertwirkung Differentialgleichungen für das Feld des Metrischen Tensors generieren. Hierfür fordern wir, daß die Wirkung  $S_H$  der in der Natur realisierten Metrik  $g_{\mu\nu}$  extremal wird:

$$\delta S_H = \int_W \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (6.102)$$

Diese Bedingung soll für beliebige Variationen  $\delta g^{\mu\nu}$  gelten, weswegen die Klammer in (6.102) verschwinden muß:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda = 0. \quad (6.103)$$

Gemäß (6.24) ist die linke Seite von (6.103) tatsächlich mit der Geometrieseite der Einsteinschen Feldgleichungen identisch. In Abwesenheit eines Quelltermes beschreibt diese Gleichung das Gravitationsfeld des materiefreien Vakuums.

### 6.3.6 Die Lagrangedichte der Materie

Unser nächstes Ziel ist es, die Einsteinschen Feldgleichungen auch in Anwesenheit von Materie aus einem Variationsverfahren abzuleiten. Unter Materie verstehen wir ein System, das ohne Berücksichtigung der Gravitation einer eigenen Dynamik unterliegt. Die durch diese Dynamik bestimmten Energie- und Impulsverhältnisse werden in einem Energie- Impulstensor  $T_{\mu\nu}^M$  protokolliert, der seinerseits als Quelle für das Gravitationsfeld agiert. Beispiele solcher Systeme sind Masseverteilungen formuliert als Staub- oder

Flüssigkeitsmodelle, und auch das Elektromagnetische Feld betrachten wir in diesem Zusammenhang als „Materie“.

Die Dynamik dieser Materiesysteme wird durch Feldgleichungen bestimmt, für die sich Lagrangedichten  $\mathcal{L}_M(q^\mu, \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\rho})$  finden lassen. Die  $q^\mu$  sind dynamische Variablen wie z.B. die Komponenten  $A_\mu$  des Viererpotentials im Falle des Elektromagnetischen Feldes. Extremalisiert man das zur Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  gehörige Wirkungsintegral

$$S_M = \int_W \mathcal{L}_M \left( q^\mu, \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\rho} \right) d^4x \quad (6.104)$$

durch Variation entlang der dynamischen Variablen  $q^\mu$ , erhält man die Bewegungsgleichungen für das betreffende Feld.

Neben den Feldgleichungen kann auch der Energie– Impulstensor  $T_{\mu\nu}^M$  durch Variation von  $S_M$  bestimmt werden. Eine detaillierte Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Lagrangedichte und dem Energie– Impulstensor würde den Rahmen dieses Abschnitts in einer Art und Weise sprengen, daß wir stattdessen auf die Standardliteratur und dort insbesondere auf [6] verweisen möchten. Darüberhinaus stellen wir die Konstruktion von  $T_{\mu\nu}^M$  in einer Liste von Handlungsanweisungen vor:

– *Aufbau der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$ :*

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  eines Materiefeldes wird allgemein kovariant formuliert, d.h.  $\mathcal{L}_M$  muß wie in der Speziellen Relativitätstheorie üblich aus Vierertensoren aufgebaut sein. Anschließend werden partielle durch kovariante Ableitungen ersetzt und sämtliche Abhängigkeiten von der Metrik in Skalarprodukten, Überschiebungen und herauf– bzw. heruntergezogenen Indizes explizit ausgeschrieben. Im Zusammenhang mit den Einsteinschen Feldgleichungen erweisen sich die Komponenten  $g^{\mu\nu}$  des inversen Metrischen Tensors als besonders praktikabel, weswegen wir die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  als Funktion der folgenden Variablen auffassen:

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M \left( q^\mu, \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\rho}, g^{\mu\nu}, \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right). \quad (6.105)$$

– *Variation von  $\mathcal{L}_M$  entlang der  $q^\mu$ :*

Durch diese Operation werden Feldgleichungen generiert, welche die Dynamik der untersuchten Materieart festlegen. Es handelt sich um die Euler– Lagrange– Gleichungen, deren Lösungen das Wirkungsintegral (6.104) extremalisieren. Üblicherweise legen die bereits als Naturgesetze bekannten Feldgleichungen die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  überhaupt erst fest.

– Variation von  $\mathcal{L}_M$  entlang der  $g^{\mu\nu}$ :

Nach Durchführung dieser Operation können wir den Energie– Impulstensor  $T_{\mu\nu}^M$  im Integranden der Variation des Wirkungsintegrals ablesen:

$$\delta S_M =: \frac{1}{2c} \int_W T_{\mu\nu}^M \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (6.106)$$

Der Faktor  $1/c$  ersetzt im Volumenelement die Koordinate  $dx^0$  durch die Zeit  $t$ , wodurch  $T_{\mu\nu}^M$  die Dimension einer Energiedichte erhält. Durch den Vergleich mit anderen Methoden zur Berechnung von  $T_{\mu\nu}^M$  wird der Faktor  $1/2$  plausibel, siehe z.B. [6]. Der so generierte Energie– Impulstensor braucht nicht mehr symmetriert zu werden weil er bereits symmetrisch ist. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_M$  gehorcht der zu (6.106) äquivalenten Gleichung

$$\delta\left(\sqrt{-|\mathbf{g}|} \mathcal{L}_M\right) =: \frac{1}{2c} \sqrt{-|\mathbf{g}|} T_{\mu\nu}^M \delta g^{\mu\nu}. \quad (6.107)$$

Bei der Variation des Wirkungsintegrals oder der Lagrangedichte muß der von der Metrik abhängige Teil  $\sqrt{-|\mathbf{g}|}$  des Volumenelementes  $d^4x$  mitvariiert werden. Da dieser als Bestandteil des invarianten Volumenelementes gewissermaßen unsichtbar ist, zieht man ihn gelegentlich aus dem Volumenelement heraus und teilt ihn dem Integranden des Wirkungsintegrals zu. Bei dieser Operation verlieren sowohl der Integrand als auch das Volumenelement ihren Tensorcharakter als Koeffizient bzw. Basiselement einer 4–Form des Raum– Zeitkontinuums [3]. Dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend bezeichnet man den so veränderten Integranden als **Tensordichte vom Gewicht 1** wie z.B. die Tensordichte  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  des Energie– Impulstensors

$$\tilde{T}_{\mu\nu} := \sqrt{-|\mathbf{g}|} T_{\mu\nu}. \quad (6.108)$$

Die sonstigen Invarianzeigenschaften wie z.B. der Charakter eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe im Falle von 6.108 bleiben durch diese Konvention unangetastet. Interessanterweise ist  $T_{\mu\nu}$  selbst eine physikalische Dichte, deren durch den Bezug auf das Volumen hervorgerufene Abhängigkeit von der Metrik in der Tensordichte  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  aufgehoben wird.

Bei der Ableitung der Geometrieseite der Einsteinschen Feldgleichungen wurde das Hilbertsche Wirkungsintegral  $S_H$  wie die Wirkung  $S_M$  in (6.106) entlang der Variablen  $g^{\mu\nu}$  variiert. Damit besteht die Möglichkeit, die Wirkungen von Materie und Raum– Zeit zusammenzufassen und so die kompletten Einsteinschen Feldgleichungen aus einem gemeinsamen Variationsprinzip abzuleiten. Zu diesem Zweck passen wir die Dimension

und das Vorzeichen von Hilberts Lagrangedichte  $\mathcal{L}_H$  an  $\mathcal{L}_M$  an und definieren

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2c\kappa} \mathcal{L}_H \quad (g \text{ für „Metrik“}) \quad (6.109)$$

$$\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M \quad (E \text{ für „Einsteinsche Feldgleichungen“}). \quad (6.110)$$

Variation und Extremalisierung des zu  $\mathcal{L}_E$  gehörigen Wirkungsintegrals  $S_E$  ergibt

$$\begin{aligned} \delta S_E &= -\frac{1}{2c\kappa} \delta S_H + \delta S_M \\ &= \int_W \left[ -\frac{1}{2c\kappa} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) + \frac{1}{2c} T_{\mu\nu}^M \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0, \end{aligned} \quad (6.111)$$

worin wir die Resultate (6.102) und (6.106) für  $\delta S_H$  und  $\delta S_M$  verwendet haben. Weil diese Beziehung für beliebige Variationen  $\delta g^{\mu\nu}$  gelten soll, führt das Verschwinden der eckigen Klammer direkt zu den Feldgleichungen (6.24) des Gravitationsfeldes mit Materie:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2c\kappa} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda \right) + \frac{1}{2c} T_{\mu\nu}^M &= 0 \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu} \Lambda &= \kappa T_{\mu\nu}^M. \end{aligned} \quad (6.112)$$

## 7 Lösung der Feldgleichungen

Die Komplexität des gekoppelten Systems (6.24) von 10 nichtlinearen Differentialgleichungen ließ die Suche nach exakten Lösungen zunächst aussichtslos erscheinen. Tatsächlich glaubte Einstein nach der Veröffentlichung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie, daß er Zeit seines Lebens keine exakte Lösung dieser Gleichungen zu Gesicht bekommen würde. Kurze Zeit später wurde er jedoch durch Karl Schwarzschilds Arbeiten eines Besseren belehrt. Die wenigen bisher bekannten exakten Lösungen bestimmen die  $g_{\mu\nu}$  allerdings nicht über das allgemeine Anfangs– Randwertproblem der Feldgleichungen sondern verwenden stattdessen für die Metrik einen Ansatz mit hoher Symmetrie, in welchem die Feldgleichungen nur wenige Parameter festlegen müssen. Bemerkenswerterweise lassen sich zwei physikalisch interessante Situationen mit solchen Ansätzen erfassen, nämlich das durch die Schwarzschildmetrik beschriebene kugelsymmetrische statische Feld einer Punktmasse und das homogene isotrope Universum, welches im Rahmen des Modells von Friedmann und Lemaître behandelt wird.

Der Metrische Tensor ist in beiden Modellen diagonal und besteht nur aus vier nichtverschwindenden Elementen. Aus diesem Grund vermeidet man in der Literatur die Angabe der vollständigen Matrix der  $g_{\mu\nu}$  und begnügt sich stattdessen mit dem Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (7.1)$$

### 7.1 Die Schwarzschildmetrik

Karl Schwarzschild war ein deutscher Astronom, der an verschiedenen Sternwarten tätig war und sich mit der photographischen Vermessung stellarer Objekte beschäftigte. Im Ersten Weltkrieg diente er freiwillig und unterstützte die Erstellung verbesserter Schießtabellen, indem er den Effekt des Seitenwindes auf ballistische Trajektorien studierte. Während er in Rußland stationiert war verfaßte er zwei Arbeiten [9] [10], in denen er Einstein mit einer exakten Lösung seiner erst ein knappes Jahr zuvor veröffentlichten Feldgleichungen überraschte. Beide Arbeiten behandeln eine statische, begrenzte und kugelsymmetrische Massenverteilung in einem ansonsten leeren Universum, das im Unendlichen die Eigenschaften des flachen Minkowskiraumes annimmt.

#### 7.1.1 Der radialsymmetrische statische Ansatz

Die Festlegung von Begriffen wie „gleichzeitig“, „statisch“ oder „radialsymmetrisch“ ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie ein ungewohnt umständlicher Prozeß, da sich solche Definitionen aufgrund der allgemeinen Kovarianz nicht auf ein einzelnes zufällig

gewähltes Koordinatensystem beziehen dürfen. Sie beschreiben vielmehr Symmetrien und Invarianzeigenschaften des betrachteten Raumes und sollten wenn möglich koordinatenfrei formuliert werden. Aus den dann noch erlaubten Koordinatensystemen kann schließlich das für die Rechnung günstigste herausgegriffen werden. Unter diesem Aspekt lautet eine angemessene Formulierung dieser Begriffe

– *Gleichzeitig:*

Für das gekrümmte Raum–Zeitkontinuum existiert kein globales Inertialsystem, in welchem sich ein Kriterium für Gleichzeitigkeit etablieren ließe. Nach Wahl eines Referenzereignisses und einem dort lokal gültigen Inertialsystem zerlegt dessen Zeitkoordinate  $x^0$  das Raum–Zeitkontinuum in einen Stapel dreidimensionaler raumartiger Folien. Die Abfolge dieser Folien wird durch  $x^0$  parametrisiert, wobei eine solche Folie als Zusammenfassung aller zum Referenzereignis raumartigen und somit potentiell gleichzeitigen Ereignissen interpretiert werden kann. Man nennt dieses Verfahren **die 3 + 1 – Zerlegung der vierdimensionalen Raumzeit**.

– *Statisch:*

Wir beschränken uns auf Metriken mit einem zeitunabhängigen Metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^0} g_{\mu\nu} = 0. \quad (7.2)$$

Der Bezug auf das jeweilige Koordinatensystem ist hier nicht zu vermeiden. Die Einschränkung (7.2) an die Metrik unterbindet auch Transformationen auf explizit zeitabhängige Koordinaten.

– *Radialsymmetrisch:*

Durch die Forderung der Radialsymmetrie wird in den dreidimensionalen raumartigen Folien ein besonderer Punkt als Zentrum dieser Symmetrie ausgezeichnet. Damit sind diese Folien zwar nicht homogen aber vom Symmetriezentrum aus betrachtet isotrop, und die Ortsabhängigkeit der Metrik beschränkt sich zwangsläufig auf die radiale Richtung. Als eigentümliche Konsequenz dieser globalen Einschränkung an die Struktur des Raumes läßt sich ein Punkt innerhalb der raumartigen Folien wieder durch einen Ortsvektor  $\underline{x}$  darstellen. Damit die Radialsymmetrie auch unter einem Wechsel des Koordinatensystems erhalten bleibt, darf die Metrik nur die Dreierskalare  $(\underline{x} \cdot \underline{x})$ ,  $(d\underline{x} \cdot d\underline{x})$  und  $(\underline{x} \cdot d\underline{x})$  enthalten, denn deren Invarianzeigenschaften garantieren die Beibehaltung einer einmal implementierten Symmetrie. Die obenstehenden Skalarprodukte werden mit Hilfe der räumlichen Komponenten  $g_{ij}$  der Metrik gebildet,  $i = \{1, 2, 3\}$ .

Wir bestimmen nun die  $g_{\mu\nu}$  durch Festlegung der oben eingeführten Skalarprodukte:

$$(\underline{x} \cdot \underline{x}) =: C(r) \quad (7.3)$$

$$(d\underline{x} \cdot d\underline{x}) =: D(r) dr^2 \quad (7.4)$$

$$(\underline{x} \cdot d\underline{x}) =: E(r) dr. \quad (7.5)$$

Damit lautet das allgemeine statische und radialsymmetrische Linienelement

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(r) (dx^0)^2 - 2E(r) dx^0 dr - D(r) dr^2 - \dots \\ &\dots - C(r) (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Dieses Linienelement bringen wir durch zwei Koordinatentransformationen in die üblicherweise verwendete Standardform. Durch geschickte Wahl eines von  $r$  abhängigen Zeitnullpunktes verschwindet das gemischte Glied in (7.6):

$$dx^0 = d\tilde{x}^0 + \frac{E(r)}{F(r)} dr \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(r) (d\tilde{x}^0)^2 - \left( D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right) dr^2 - \dots \\ &\dots - C(r) (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Schließlich skalieren wir die radiale Koordinate  $r$  dergestalt um, daß wir den Koeffizienten  $C(r)$  im Quadrat einer Variablen  $\tilde{r}$  absorbieren. Die hierbei auftretende Ableitung nach  $r$  bezeichnen wir mit einem Strich:

$$\tilde{r}^2 := C(r) \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(\tilde{r}) (d\tilde{x}^0)^2 - \frac{4C(\tilde{r})}{C'^2(\tilde{r})} \left( D(\tilde{r}) + \frac{E^2(\tilde{r})}{F(\tilde{r})} \right) d\tilde{r}^2 - \dots \\ &\dots - \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Den Standardausdruck für die Schwarzschildmetrik erhalten wir, indem wir abkürzende Bezeichnungen für die obenstehenden Koeffizienten einführen [2] [7]:

$$ds^2 = B(\tilde{r}) c^2 d\tilde{t}^2 - A(\tilde{r}) d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \quad (7.11)$$

Dieser Ansatz muß nach Berechnung der Koeffizienten auf Plausibilität überprüft werden, denn nur wenn sowohl  $A(\tilde{r})$  als auch  $B(\tilde{r})$  positiv sind, können  $\tilde{r}$  als Orts- und  $\tilde{t}$  als Zeitkoordinate aufgefaßt werden. Aus dem Linienelement (7.11) lassen sich die Komponenten des Metrischen Tensors ablesen:

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{1}{g^{\tilde{t}\tilde{t}}} = B(\tilde{r}) c^2 \quad (7.12)$$

$$g_{\tilde{r}\tilde{r}} = \frac{1}{g^{\tilde{r}\tilde{r}}} = -A(\tilde{r}) \quad (7.13)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{g^{\varphi\varphi}} = -\tilde{r}^2 \sin^2(\vartheta) \quad (7.14)$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{g^{\vartheta\vartheta}} = -\tilde{r}^2. \quad (7.15)$$

Die scheinbar gewohnte Form des Raumwinkelbeitrages in (7.11) verleitet dazu, die radiale Koordinate als Radius der betreffenden Kugelschale zu misinterpretieren. Die Oberfläche der durch  $\tilde{r}$  bezeichneten Kugelschale lautet zwar tatsächlich

$$O^{(2)}(\tilde{r}) = 4\pi\tilde{r}^2, \quad (7.16)$$

jedoch hat  $\tilde{r}$  nicht die Bedeutung eines Radius. Der Abstand  $R$  des Koordinatenursprungs zur Kugeloberfläche kann erst mit Hilfe der Metrik angegeben werden:

$$R = \int_0^{\tilde{r}} \sqrt{A(r')} dr'. \quad (7.17)$$

### 7.1.2 Berechnung der Christoffelsymbole

Am einfachsten lassen sich die Christoffelsymbole für die Schwarzschildmetrik aus der Lagrangefunktion  $L_p$  eines freien Teilchens ermitteln. Diese erhalten wir, indem wir das Linienelement (7.11) entlang einer Kurve auswerten. Zu diesem Zweck fassen wir die Koordinaten als Funktionen eines Kurvenparameters  $\lambda$  auf:

$$\tilde{t} = \tilde{t}(\lambda), \quad \tilde{r} = \tilde{r}(\lambda), \quad \varphi = \varphi(\lambda), \quad \vartheta = \vartheta(\lambda)$$

$$\dot{\tilde{t}} = \frac{d\tilde{t}}{d\lambda}, \quad \dot{\tilde{r}} = \frac{d\tilde{r}}{d\lambda}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

$$L_p = B(\tilde{r}) c^2 \dot{\tilde{t}}^2 - A(\tilde{r}) \dot{\tilde{r}}^2 - \tilde{r}^2 \left( \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right). \quad (7.18)$$

Für die Euler–Lagrangeschen Gleichungen benötigen wir die Ableitungen der Lagrangefunktion nach den Koordinaten und deren „Geschwindigkeiten“:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{t}} = 2B c^2 \dot{t} \quad \frac{\partial L_p}{\partial t} = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{\tilde{r}}} = -2A \dot{\tilde{r}} \quad \frac{\partial L_p}{\partial \tilde{r}} = B' c^2 \dot{t}^2 - A' \dot{\tilde{r}}^2 - 2\tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{\varphi}} = -2\tilde{r}^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} \quad \frac{\partial L_p}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{\vartheta}} = -2\tilde{r}^2 \dot{\vartheta} \quad \frac{\partial L_p}{\partial \vartheta} = -2\tilde{r}^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2. \quad (7.22)$$

Die Ableitung  $\partial/\partial \tilde{r}$  nach der Radialkoordinate wurde in den obenstehenden Ausdrücken mit ' abgekürzt. Da die Koeffizienten  $A(\tilde{r})$  und  $B(\tilde{r})$  nur von dieser Koordinate abhängen, ist diese Bezeichnung eindeutig. Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x^\mu} = 0 \quad (7.23)$$

lauten für die Schwarzschildmetrik

$$\ddot{t} + \frac{B'}{B} \dot{t} \dot{\tilde{r}} = 0 \quad (7.24)$$

$$\ddot{\tilde{r}} + \frac{1}{2} \frac{B'}{A} c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \dot{\tilde{r}}^2 - \frac{1}{A} \tilde{r} (\sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) = 0 \quad (7.25)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \frac{1}{\tilde{r}} \dot{\tilde{r}} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} = 0 \quad (7.26)$$

$$\ddot{\vartheta} + 2 \frac{1}{\tilde{r}} \dot{\tilde{r}} \dot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (7.27)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die Christoffelsymbole direkt ablesen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\tilde{t}\tilde{r}}^{\tilde{t}} &= \frac{1}{2} \frac{B'}{B} \\
\Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} &= \frac{1}{2} \frac{B'}{A} c^2 & \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} &= \frac{1}{2} \frac{A'}{A} & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} &= -\frac{1}{A} \tilde{r} \sin^2(\vartheta) & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\tilde{r}} &= -\frac{1}{A} \tilde{r} \\
\Gamma_{\tilde{r}\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{\tilde{r}} & \Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi} &= \cot(\vartheta) & & & & \\
\Gamma_{\tilde{r}\vartheta}^{\vartheta} &= \frac{1}{\tilde{r}} & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta). & & & & 
\end{aligned} \tag{7.28}$$

### 7.1.3 Berechnung des Ricci- und des Einsteintensors

Statt im Voraus alle zwanzig wesentlichen Komponenten des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors

$$R^{\kappa}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} \Gamma^{\kappa}_{\sigma\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\sigma\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \tag{7.29}$$

anzugeben sollten wir bedenken, daß wir nur am Ricci Tensor interessiert sind und uns daher auf die hierfür notwendigen Komponenten beschränken können. Aufgrund der hohen Symmetrie, der Zeitunabhängigkeit und der daran angepaßten Wahl des Koordinatensystems verschwinden bei der Schwarzschildmetrik sämtliche Nichtdiagonalelemente des Ricci Tensors. Damit ist es vollkommen ausreichend, nur die zwölf Komponenten des Riemann-Christoffelschen Krümmungstensors bereitzustellen, die in den Diagonalelementen des Ricci Tensors vorkommen:

$$R_{\tilde{t}\tilde{t}} = R^{\tilde{r}}_{\tilde{t}\tilde{r}\tilde{t}} + R^{\varphi}_{\tilde{t}\varphi\tilde{t}} + R^{\vartheta}_{\tilde{t}\vartheta\tilde{t}} \tag{7.30}$$

$$R_{\tilde{r}\tilde{r}} = R^{\tilde{t}}_{\tilde{r}\tilde{t}\tilde{r}} + R^{\varphi}_{\tilde{r}\varphi\tilde{r}} + R^{\vartheta}_{\tilde{r}\vartheta\tilde{r}} \tag{7.31}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R^{\tilde{t}}_{\varphi\tilde{t}\varphi} + R^{\tilde{r}}_{\varphi\tilde{r}\varphi} + R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} \tag{7.32}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = R^{\tilde{t}}_{\vartheta\tilde{t}\vartheta} + R^{\tilde{r}}_{\vartheta\tilde{r}\vartheta} + R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta} \tag{7.33}$$

Wir berechnen nun diese Komponenten des Krümmungstensors mit Hilfe der Christoffelsymbole (7.28):

Komponente  $R_{\tilde{t}\tilde{t}}$ :

$$\begin{aligned} R^{\tilde{r}}_{\tilde{t}\tilde{t}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} + \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{r}\tilde{t}}^{\tilde{t}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{B'}{A} \right) + \frac{1}{2} \frac{A'B'}{A^2} - \frac{1}{2} \frac{B'^2}{AB} \right) c^2 \end{aligned} \quad (7.34)$$

$$R^{\varphi}_{\tilde{t}\varphi\tilde{t}} = \Gamma_{\varphi\tilde{r}}^{\varphi} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} = \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{B'}{A} c^2 \quad (7.35)$$

$$R^{\vartheta}_{\tilde{t}\vartheta\tilde{t}} = \Gamma_{\vartheta\tilde{r}}^{\vartheta} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{t}}^{\tilde{r}} = \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{B'}{A} c^2 \quad (7.36)$$

Komponente  $R_{\tilde{r}\tilde{r}}$ :

$$\begin{aligned} R^{\tilde{t}}_{\tilde{r}\tilde{r}} &= -\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma_{\tilde{t}\tilde{r}}^{\tilde{t}} + \Gamma_{\tilde{t}\tilde{r}}^{\tilde{t}} \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\tilde{t}\tilde{r}}^{\tilde{t}}{}^2 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{4} \frac{A'B'}{AB} - \frac{1}{4} \left( \frac{B'}{B} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$R^{\varphi}_{\tilde{r}\varphi\tilde{r}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma_{\varphi\tilde{r}}^{\varphi} + \Gamma_{\varphi\tilde{r}}^{\varphi} \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\tilde{r}\varphi}^{\varphi}{}^2 = \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{A'}{A} \quad (7.38)$$

$$R^{\vartheta}_{\tilde{r}\vartheta\tilde{r}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma_{\vartheta\tilde{r}}^{\vartheta} + \Gamma_{\vartheta\tilde{r}}^{\vartheta} \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\tilde{r}\vartheta}^{\vartheta}{}^2 = \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{A'}{A} \quad (7.39)$$

Komponente  $R_{\varphi\varphi}$ :

$$R^{\tilde{t}}_{\varphi\tilde{t}\varphi} = \Gamma_{\tilde{t}\tilde{r}}^{\tilde{t}} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} = -\frac{1}{2} \frac{B'}{BA} \tilde{r} \sin^2(\vartheta) \quad (7.40)$$

$$R^{\tilde{r}}_{\varphi\tilde{r}\varphi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} + \Gamma_{\tilde{r}\tilde{r}}^{\tilde{r}} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{r}\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{A'}{A^2} \tilde{r} \sin^2(\vartheta) \quad (7.41)$$

$$R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} + \Gamma_{\vartheta\tilde{r}}^{\vartheta} \Gamma_{\varphi\varphi}^{\tilde{r}} - \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \left( 1 - \frac{1}{A} \right) \sin^2(\vartheta) \quad (7.42)$$

Komponente  $R_{\vartheta\vartheta}$ :

$$R^{\tilde{t}}_{\vartheta\tilde{t}\vartheta} = \Gamma^{\tilde{t}}_{\tilde{t}\tilde{r}} \Gamma^{\tilde{r}}_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2} \frac{B'}{BA} \tilde{r} \quad (7.43)$$

$$R^{\tilde{r}}_{\vartheta\tilde{r}\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \Gamma^{\tilde{r}}_{\vartheta\vartheta} + \Gamma^{\tilde{r}}_{\tilde{r}\tilde{r}} \Gamma^{\tilde{r}}_{\vartheta\vartheta} - \Gamma^{\tilde{r}}_{\vartheta\vartheta} \Gamma^{\vartheta}_{\tilde{r}\vartheta} = \frac{1}{2} \frac{A'}{A^2} \tilde{r} \quad (7.44)$$

$$R^{\varphi}_{\vartheta\varphi\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\tilde{r}} \Gamma^{\tilde{r}}_{\vartheta\vartheta} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta}{}^2 = 1 - \frac{1}{A}. \quad (7.45)$$

Diese zwölf Komponenten des Krümmungstensors setzen sich folgendermaßen zu den Diagonalelementen des Ricci Tensors zusammen:

$$R_{\tilde{t}\tilde{t}} = \left( \frac{1}{2} \frac{B''}{A} - \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{B'}{A} \right) c^2 \quad (7.46)$$

$$R_{\tilde{r}\tilde{r}} = -\frac{1}{2} \frac{B''}{B} + \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{A'}{A} \quad (7.47)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \left( -\frac{\tilde{r}}{2} \frac{1}{A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + 1 - \frac{1}{A} \right) \sin^2(\vartheta) \quad (7.48)$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = -\frac{\tilde{r}}{2} \frac{1}{A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + 1 - \frac{1}{A}. \quad (7.49)$$

Es ist in der Literatur nicht üblich, die Skalare Krümmung oder den Einsteintensor für die Schwarzschildmetrik anzugeben, da für gewöhnlich die Lösung der Vakuumgleichungen untersucht wird. Mit  $T_{\mu\nu} = 0$  verschwindet nämlich (6.29) zufolge die Skalare Krümmung und der Einsteintensor unterscheidet sich nicht vom Ricci Tensor. Da dieser Text jedoch als Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie ausgelegt ist und die Diskussion der Schwarzschildlösung als Beispiel für die Konstruktion einer exakten Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen dienen soll, verfahren wir auch weiterhin „streng nach Vorschrift“. Die Kenntnis des Einsteintensors bietet darüberhinaus die Möglichkeit, das Gravitationsfeld auch innerhalb einer radialsymmetrischen Materieverteilung zu studieren. Die Skalare Krümmung ist als die Spur des Ricci Tensors definiert und lautet im Fall der Schwarzschildmetrik

$$\begin{aligned} R &= g^{\tilde{t}\tilde{t}} R_{\tilde{t}\tilde{t}} + g^{\tilde{r}\tilde{r}} R_{\tilde{r}\tilde{r}} + g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi} + g^{\vartheta\vartheta} R_{\vartheta\vartheta} \\ &= \frac{B''}{BA} - \frac{1}{2} \frac{B'}{BA} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{1}{A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) + \frac{2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{1}{A} - 1 \right). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Die zur Berechnung der Skalaren Krümmung benötigten Koeffizienten  $g^{\mu\nu}$  des inversen Metrischen Tensors wurden den Gleichungen (7.12) – (7.15) entnommen. Die Kenntnis von  $R$  ermöglicht die Berechnung des Einsteintensors

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (7.51)$$

der wie der Ricci Tensor und die Metrik ebenfalls Diagonalgestalt besitzt:

$$G_{\tilde{t}\tilde{t}} = \left( \frac{B}{A^2} \frac{1}{\tilde{r}} A' - B \frac{1}{\tilde{r}^2} \left( \frac{1}{A} - 1 \right) \right) c^2 \quad (7.52)$$

$$G_{\tilde{r}\tilde{r}} = \frac{B'}{B} \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} (1 - A) \quad (7.53)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \left( \frac{1}{2} \frac{B''}{BA} - \frac{1}{4} \frac{B'}{BA} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{1}{A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) \right) \tilde{r}^2 \sin^2(\vartheta) \quad (7.54)$$

$$G_{\vartheta\vartheta} = \left( \frac{1}{2} \frac{B''}{BA} - \frac{1}{4} \frac{B'}{BA} \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{2\tilde{r}} \frac{1}{A} \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) \right) \tilde{r}^2. \quad (7.55)$$

#### 7.1.4 Lösung der Feldgleichungen

Wir gehen davon aus, daß eine Massenverteilung um  $\tilde{r} = 0$  für das hier untersuchte radialsymmetrische Gravitationsfeld verantwortlich ist. Wir wollen dieses Feld im Außenbereich dieser Massen studieren und müssen daher die Vakuum- Feldgleichungen mit  $T_{\mu\nu} = 0$  lösen:

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (7.56)$$

Aus den Diagonalelementen des Einsteintensors (7.52) – (7.55) lassen sich zunächst drei Differentialgleichungen für  $A(\tilde{r})$  und  $B(\tilde{r})$  bilden:

$$\tilde{r}A' + A(A - 1) = 0 \quad (7.57)$$

$$\tilde{r}B' + B(1 - A) = 0 \quad (7.58)$$

$$2\tilde{r}B'' - \tilde{r}B' \left( \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + 2B \left( \frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) = 0. \quad (7.59)$$

Die hierfür notwendigen Umformungen setzen voraus daß  $\tilde{r}$ ,  $A(\tilde{r})$  und  $B(\tilde{r})$  nicht identisch verschwinden. Dieses System von Differentialgleichungen ist nicht überbestimmt, denn die dritte Gleichung (7.59) folgt aus den beiden anderen. Damit werden die Größen  $A(\tilde{r})$  und  $B(\tilde{r})$  tatsächlich nur durch zwei Differentialgleichungen festgelegt, die sich in die folgende Form bringen lassen:

$$\tilde{r}A' + A(A - 1) = 0 \quad (7.60)$$

$$BA' + AB' = 0. \quad (7.61)$$

Wir verwenden zunächst die zweite Gleichung, um den Koeffizient  $B$  als Funktion von  $A$  auszudrücken

$$B = B(A(\tilde{r})), \quad B' = \frac{dB}{dA} A', \quad (7.62)$$

wodurch Gleichung (7.61) zu einer separablen Differentialgleichung für  $B(A)$  wird:

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dA} = -\frac{1}{A}. \quad (7.63)$$

Durch Integration beider Seiten erhalten wir als Lösung

$$B = \frac{c_1}{A} \quad (7.64)$$

mit der Integrationskonstanten  $c_1$ . Die erste Gleichung (7.60) ist ebenfalls eine separable Differentialgleichung für die Funktion  $A(\tilde{r})$ :

$$\left( \frac{1}{A} - \frac{1}{A-1} \right) A' = \frac{1}{\tilde{r}}. \quad (7.65)$$

Die Integration dieser Gleichung führt auf die Lösung

$$\frac{A}{A-1} = \frac{\tilde{r}}{c_2} \quad \Rightarrow \quad A = \left( 1 - \frac{c_2}{\tilde{r}} \right)^{-1} \quad (7.66)$$

mit einer weiteren Integrationskonstanten  $c_2$ . Das Linienelement der Schwarzschildmetrik bekommt damit die folgende Form:

$$ds^2 = c_1 \left( 1 - \frac{c_2}{\tilde{r}} \right) c^2 dt^2 - \left( 1 - \frac{c_2}{\tilde{r}} \right)^{-1} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \quad (7.67)$$

### 7.1.5 Vergleich mit dem Newtonschen Grenzfall

Das im letzten Abschnitt hergeleitete Linienelement der Schwarzschildmetrik enthält noch die beiden Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$ , die wir nun durch Vergleich mit dem klassischen Gravitationsfeld bestimmen wollen. Da die Wirkung der um den Koordinatenursprung konzentrierten gravitierenden Massen im Unendlichen verschwindet, geht die Metrik dort in die Minkowskimetrik über, und die noch vorhandenen geringen Abweichungen vom flachen Raum–Zeitkontinuum können durch das klassische Gravitationspotential einer Punktmasse beschrieben werden. In Abschnitt 6.2.4 hatten wir bereits das Linienelement (6.76) des schwachen Gravitationsfeldes mit dem Newtonschen Potential in Verbindung bringen können:

$$ds^2 = (c^2 + 2\Phi) dt^2 - dr^2 - r^2(\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) \quad (7.68)$$

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (7.69)$$

Den räumlichen Anteil des Linienelementes haben wir hier in Kugelkoordinaten ausgedrückt und die Gesamtmasse im Zentrum mit  $M$  bezeichnet. Desweiteren vermuten wir, daß die Koordinate  $\tilde{r}$  im Fernfeldbereich in den gewohnten radialen Abstand  $r$  übergeht. Die Koordinate  $\tilde{t}$  ist die von uns gewählte Zeitvariable, so daß wir die beiden Integrationskonstanten durch den Vergleich der Komponente  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  mit der Schwachfeldnäherung (7.68) bestimmen können:

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = c_1 \left(1 - \frac{c_2}{\tilde{r}}\right) c^2 := c^2 - 2 \frac{GM}{\tilde{r}} \quad (7.70)$$

$$c_1 = 1 \quad (7.71)$$

$$c_2 = 2 \frac{GM}{c^2}. \quad (7.72)$$

Die beiden Komponenten  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  und  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  lauten somit

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = c^2 - 2 \frac{GM}{\tilde{r}}, \quad g_{\tilde{r}\tilde{r}} = - \left(1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{\tilde{r}}\right)^{-1}. \quad (7.73)$$

Anhand dieser Ausdrücke können wir nachvollziehen, daß  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  für große  $\tilde{r}$  wegen

$$g_{\tilde{r}\tilde{r}} \stackrel{\tilde{r} \rightarrow \infty}{\approx} -1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{\tilde{r}} \stackrel{c \rightarrow \infty}{\approx} -1 \quad (7.74)$$

mit dem Linienelement (7.68) in nichtrelativistischer Näherung verträglich ist und daß die Koordinate  $\tilde{r}$  tatsächlich zum gewöhnlichen radialen Abstand wird. Nach der Festlegung der Integrationskonstanten können wir nun die endgültige Form des Linienelementes für die Schwarzschildmetrik angeben:

$$ds^2 = \left( c^2 - 2 \frac{GM}{\tilde{r}} \right) d\tilde{t}^2 - \left( 1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{\tilde{r}} \right)^{-1} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \quad (7.75)$$

Fassen wir noch einmal die Voraussetzungen zusammen, unter denen die Schwarzschildlösung hergeleitet wurde:

- Die Raumzeit sowie die gravitierende Quelle im Zentrum  $\tilde{r} = 0$  sind radialsymmetrisch.
- Die Schwarzschildlösung geht für  $\tilde{r} \rightarrow \infty$  in die flache Minkowskimetrik über und ist im Fernfeldbereich mit dem Newtonschen Gravitationspotential einer Punktmasse  $M$  verträglich.
- Die gravitierende Massenverteilung und die daraus resultierende Raumzeit sind statisch.

Interessanterweise kann die letzte Voraussetzung durch die Hinzunahme zeitabhängiger Massenverteilungen abgeschwächt werden, wodurch sich die Schwarzschildlösung als die einzig mögliche Raumzeit im Außenbereich einer beliebigen statischen oder zeitabhängigen radialsymmetrischen Gravitationsquelle herausstellt. Diese Aussage von George David Birkhoff [12] aus dem Jahr 1923 trägt den Namen **Birkhoff– Theorem** und ist die allgemeinrelativistische Verallgemeinerung jenes Satzes der klassischen Mechanik, demzufolge eine beliebige radialsymmetrische Massenverteilung im Außenbereich das Gravitationsfeld einer Punktmasse erzeugt.

### 7.1.6 Interpretation der Schwarzschildmetrik

Die Aneignung eines fundierten Verständnisses für die Physik der Schwarzschildmetrik ist alles andere als trivial, und tatsächlich hat sich die heutzutage allgemein akzeptierte Interpretation des „Schwarzen Loches“ erst zu Beginn der Sechziger Jahre durchgesetzt. Eine Physikergeneration zuvor favorisierte man stattdessen das Bild des „Frozen Star“, eines Objektes, in dem sämtliche Prozesse bis zur Unendlichkeit verlangsamt sind. Diese Interpretation der Schwarzschildmetrik wurde durch die Arbeit [11] von J. Robert Oppenheimer und Hartland S. Snyder aus dem Jahr 1939 populär, in welcher die Entstehung eines Neutronensterns durch den Kollaps einer großen ausgebrannten Sonne untersucht wurde. Oppenheimer und Snyder zeigten, daß diese Sternimpllosion sich in den Augen eines außenstehenden Beobachters zunehmend verlangsamt und

schließlich zum Stillstand kommt, weswegen die Vorstellung eines „Frozen Star“ durchaus naheliegt. Dieses Verhalten läßt sich aus der Form der beiden Koeffizienten  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  und  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  ablesen:

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = c^2 - 2 \frac{GM}{\tilde{r}} \quad (7.76)$$

$$g_{\tilde{r}\tilde{r}} = \left(1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{\tilde{r}}\right)^{-1}. \quad (7.77)$$

Beide Koeffizienten wechseln im Punkt

$$\tilde{r} = R_S := 2 \frac{GM}{c^2} \quad (7.78)$$

das Vorzeichen, wobei  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  eine Nullstelle und  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  einen Pol durchläuft. Der Ausdruck  $R_S$  wird als **Schwarzschildradius** bezeichnet, obwohl es sich strenggenommen weder um einen Radius noch überhaupt um einen Abstand handelt, vgl. (7.17). Betrachten wir das Eigenzeitelement  $d\tau$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (7.79)$$

eines in Bezug zum Gravitationszentrum ruhenden Beobachters mit  $d\tilde{r} = d\varphi = d\vartheta = 0$ , dann lautet  $d\tau$  im Bereich  $\tilde{r} > R_S$  außerhalb des Schwarzschildradius

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{\tilde{t}\tilde{t}}} d\tilde{t} = \sqrt{1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{\tilde{r}}} d\tilde{t}. \quad (7.80)$$

Man erkennt, daß die Schwarzschildmetrik für große Entfernungen in die Minkowskime-  
trik übergeht, in welcher die Koordinate  $\tilde{t}$  wegen  $d\tau = d\tilde{t}$  zur Eigenzeit eines dort ruhen-  
den Beobachters wird. Mit zunehmender Nähe zum Schwarzschildradius entspricht das  
Eigenzeitintervall  $d\tau$  immer größeren Zeiträumen  $d\tilde{t}$  des weit entfernten Beobachters,  
bis schließlich in  $R_S$  selbst das Intervall  $d\tilde{t}$  unendlich groß wird. Der weit entfernte Be-  
obachter kann somit am Schwarzschildradius keine Dynamik mehr feststellen, da er für  
jede dort stattfindende Veränderung unendlich lange warten muß. Gleichzeitig diver-  
giert die Komponente  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  und beweist, daß im Schwarzschildradius das hier verwendete  
Koordinatensystem seine Gültigkeit verliert. Da Signale vom Schwarzschildradius den  
Beobachter erst nach unendlich langer Zeit erreichen, bildet die Kugelschale  $\tilde{r} = R_S$   
einen Ereignishorizont, der das Innengebiet  $\tilde{r} < R_S$  von den außerhalb des Schwarz-  
schildradius lebenden Beobachtern kausal trennt.

Denkt man genauer über das Erscheinungsbild nach, welches ein kollabierendes Objekt  
beim Erreichen des Schwarzschildradius einem entfernten Beobachter bietet, erkennt

man, daß die Vorstellung des Frozen Star irreführend ist [22]. In zunehmender Nähe zum Schwarzschildradius emittiertes Licht erreicht den Beobachter aufgrund der oben angesprochenen Zeitdilatation merklich rotverschoben zunächst als Infrarotstrahlung und später als Radiowellen. Schließlich werden die Frequenzen des Lichtes so klein, daß die mit ihm übertragenen Informationen vom Empfänger nicht mehr ausgewertet werden können. Im Photonenbild ist die Situation ähnlich, da der Photonenfluß vom Objekt zum Beobachter kontinuierlich abnimmt und irgendwann das letzte Photon außerhalb des Schwarzschildradius ausgesandt wird. Auf oder innerhalb von  $R_S$  emittierte Photonen können den Beobachter nicht mehr erreichen. Dieser sieht also nicht eine am Schwarzschildradius eingefrorene Implosion sondern vielmehr ein zunehmend rotverschobenes und schwächer werdendes Bild des Sternes, das schließlich nach endlicher Zeit und der Aussendung eines letzten Photons verschwindet. John Archibald Wheeler hatte zu Beginn der Sechziger Jahre für ein solches bis zur Grenze seines Schwarzschildradius kollabiertes Objekt die Bezeichnung **Schwarzes Loch** eingeführt, da es keine Informationen nach außen mehr versendet.

Im Innenbereich des Schwarzschildradius verändert sich die Metrik (7.75) auf radiakale Weise, indem die Koeffizienten  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  und  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  das Vorzeichen wechseln. Die Zeit  $\tilde{t}$  erhält damit den Charakter einer Ortskoordinate, während  $\tilde{r}$  zu einer Zeitkoordinate wird. Die suggestive Umbenennung

$$\tilde{r} =: c\hat{t} \quad (7.81)$$

$$z := c\tilde{t} \quad (7.82)$$

hebt diesen Wechsel besonders hervor und eignet sich für eine Gegenüberstellung der Metrik außerhalb und innerhalb von  $R_S$ :

Für  $\tilde{r} > R_S$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{\tilde{r}}\right) c^2 d\tilde{t}^2 - \left(1 - \frac{R_S}{\tilde{r}}\right)^{-1} d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) \quad (7.83)$$

Für  $\tilde{r} < R_S$ :

$$ds^2 = \left(\frac{R_S}{\hat{t}} - 1\right)^{-1} c^2 d\hat{t}^2 - \left(\frac{R_S}{\hat{t}} - 1\right) dz^2 - c^2 \hat{t}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) . \quad (7.84)$$

Aus der Form (7.84) der inneren Schwarzschildlösung lassen sich überraschende Schlussfolgerungen ziehen:

- Offensichtlich ist die Schwarzschildlösung nur im Außenbereich statisch. Innerhalb des Schwarzschildradius bekommt die radiale Koordinate den Charakter einer Zeit und die Metrik wird somit explizit zeitabhängig.
- Jedes den Schwarzschildradius von außen erreichende Objekt hat eine negative radiale Geschwindigkeit. Dieses Schrumpfen von  $\tilde{r}$  läßt sich anschließend nicht mehr aufhalten, da es nun zu einer Art Zeitablauf und somit unumkehrbar geworden ist. Das Erreichen der Singularität im Zentrum wird auf diese Weise genauso unvermeidbar wie der Anbruch des nächsten Tages für den außerhalb des Schwarzen Loches stationierten Beobachter. Aufgrund der festgelegten Richtung des Zeitablaufes kann nichts das Schwarze Loch wieder verlassen.
- Läßt man im Innenraum eines Schwarzen Loches einen umgekehrten Zeitfluß zu, erreicht jedes dort vorhandene Objekt zwangsläufig den Schwarzschildradius und wird emittiert. Ein solches zeitumgekehrtes Schwarzes Loch wird als **Weißes Loch** bezeichnet. Das Problem Weißer Löcher ist, daß sie sich gar nicht erst formieren können, da sie alles sofort wieder ausstoßen. In diesem Fall verhindert die Nichtumkehrbarkeit des Zeitablaufes das Eindringen von Materie. Fügen wir mangels Alternativen dem hypothetischen Weißen Loch einen spekulativen Fütterungsmechanismus aus dem Zentrum eines Schwarzen Loches hinzu, erhalten wir ein **Wurmloch**, welches demzufolge durch die Verbindung der Zentren eines Schwarzen und eines Weißen Loches entsteht.

Die oben angegebenen Formen (7.83) und (7.84) der Schwarzschildmetrik lassen zunächst offen, ob die Singularität des Koeffizienten  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  bzw.  $g_{\tilde{t}\tilde{t}}$  in der Nähe des Schwarzschildradius einen Bruch des Raum–Zeitkontinuums oder nur eine Besonderheit des verwendeten Koordinatensystems darstellt. Berücksichtigt man jedoch auch das Verhalten von Tensorgrößen wie der Skalaren Krümmung an dieser Stelle, dann ist keine Singularität des Raum–Zeitkontinuums zu erkennen. So verschwindet beispielsweise die Skalare Krümmung mit  $R = 0$  sowohl im Innen– und im Außenbereich als auch im Schwarzschildradius selbst. Tatsächlich ist das singuläre Verhalten des Koeffizienten  $g_{\tilde{r}\tilde{r}}$  ein Artefakt der hier verwendeten Koordinaten, in denen ein stationärer Beobachter des Schwarzen Loches ruht. Andere Klassen von Koordinatensystemen zeigen diese Singularität nicht, da sie Ort und Zeit in geeigneter Weise miteinander kombinieren. In ihnen läßt sich nachvollziehen, daß der Fall in die zentrale Singularität für das fallende Objekt selbst nur endliche Zeit dauert. Beispiele für solche partiell mitbewegten Koordinatensysteme sind die **Eddington–Finkelstein–** oder die **Kruskal–Szekeres** Koordinaten, die wir hier nur namentlich erwähnen und nicht im Detail vorstellen wollen. Die Singularität im Schwarzschildradius ist also am ehesten mit der Ungültigkeit von Kugelkoordinaten in den Polen zu vergleichen.

Es wäre allerdings ein Fehler anzunehmen, diese Singularität sei ohne Bedeutung, nur weil sie in gewissen besser gewählten Koordinatensystemen nicht auftritt. Die freie Wahl des Koordinatensystems besteht zwar auf dem Papier, aber ein irdisches Observatorium fällt nicht in das beobachtete Schwarze Loch. Es ist stattdessen an die Schwarzschildkoordinaten gebunden, in denen der Ereignishorizont im Schwarzschildradius ein reales und nicht zu umgehendes Faktum ist.

### 7.1.7 Größe des Schwarzschildradius

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir zeigen, daß die Berechnung der Fallzeit vom Schwarzschildradius in die zentrale Singularität auch mit Hilfe der Metrik (7.83) trotz divergierender Komponenten durchgeführt werden kann. Hierfür betrachten wir zunächst den „wahren“ Schwarzschildradius  $\hat{R}_S$ , denn wie bereits in (7.17) angedeutet ist die üblicherweise als Schwarzschildradius bezeichnete Größe

$$R_S = 2 \frac{GM}{c^2} \quad (7.85)$$

eher ein Maß für die Kugelfläche des Ereignishorizontes als ein Abstand oder Radius im herkömmlichen Sinne. Wir erhalten  $\hat{R}_S$ , indem wir das Linienelement (7.83) zu einem festen Zeitpunkt und mit fixierten Winkelkoordinaten  $d\tilde{t} = d\varphi = d\vartheta = 0$  integrieren:

$$\hat{R}_S = \int_0^{R_S} \sqrt{g_{\tilde{r}\tilde{r}}} d\tilde{r} = \int_0^{R_S} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{\frac{R_S}{\tilde{r}} - 1}}. \quad (7.86)$$

Durch Normierung auf  $R_S$  machen wir die Integrationsvariable dimensionslos und erhalten mit  $x = \tilde{r}/R_S$

$$\begin{aligned} \hat{R}_S &= R_S \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} \\ &= R_S \left[ \arcsin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} R_S. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Weiterhin muß man bedenken, daß diese Integration im Innenbereich des Schwarzen Loches stattfindet, wo die radiale Koordinate den Charakter einer Zeit besitzt. Daher halten wir statt der Zeit und zwei Raumdimensionen eigentlich mit  $dz = d\varphi = d\vartheta = 0$

drei Raumdimensionen fest, und das Integral erstreckt sich über die zur Radialkoordinaten äquivalenten Zeit  $\hat{r} = c\hat{t}$ . Unter diesem Blickwinkel betrachtet beschreibt die Metrik (7.83) mit

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left( \frac{R_S}{c\hat{t}} - 1 \right)^{-1} c^2 d\hat{t}^2 \quad (7.88)$$

die Eigenzeit  $\tau$  eines Objektes, das die zentrale Singularität erreicht, indem es bezüglich der inneren Raumkoordinaten ruht und einfach die Zeit verstreichen läßt. Da diese „Bewegung“ einer Geodäten folgt steht dem Objekt der maximal mögliche Zeitraum zur Verfügung. Jeder Versuch, von dieser Geodäten unter Einsatz nichtgravitativer Kräfte abzuweichen, verhindert den Absturz ins Zentrum nicht nur nicht sondern verkürzt sogar die noch verbleibende Zeit. Die Bedingung  $dz = 0$  wird durch ein ins Schwarze Loch fallendes Objekt ebenfalls erfüllt, denn dessen Zeitablauf hält wegen  $g_{\hat{t}\hat{t}} = 0$  im Schwarzschildradius an und geht somit nahtlos in  $dz = 0$  über. Das Zeitintervall  $\tau_0$  bis zum Erreichen des Zentrums lautet damit

$$\tau_0 = \frac{1}{c} \hat{R}_S = \frac{\pi}{2c} R_S = \pi \frac{GM}{c^3}. \quad (7.89)$$

Um eine Vorstellung von den Größenordnungen der Fallzeiten und Schwarzschildradien verschiedener astronomischer Objekte zu bekommen, fassen wir zum Schluß einige typische Werte in einer kleinen Tabelle zusammen. Als Beispiele wählen wir die Erde, die Sonne und ein hypothetisches Schwarzes Loch von einer Millionen Sonnenmassen im Zentrum einer Galaxie. Weder die Erde noch die Sonne werden jemals ein Schwarzes Loch werden, aber es gibt Hinweise für die Existenz Schwarzer Löcher in einigen galaktischen Zentren wie beispielsweise in unserer Milchstraße. Zur Berechnung verwenden wir die Konstanten

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (7.90)$$

$$c = 3.00 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (7.91)$$

auf zwei Nachkommastellen genau und erhalten

	$M$	$S_R$	$\tau_0$
Erde:	$5.97 \cdot 10^{24} kg$	$8.85 \cdot 10^{-3} m$	$4.63 \cdot 10^{-11} s$
Sonne:	$1.99 \cdot 10^{30} kg$	$2.95 \cdot 10^3 m$	$1.54 \cdot 10^{-5} s$
Galaxie:	$1.99 \cdot 10^{36} kg$	$2.95 \cdot 10^9 m$	15.4 s

Man sieht, daß der Schwarzschildradius eines Schwarzen Loches mit der Masse der Erde bereits außerordentlich klein ist. Stephen Hawking befaßte sich 1974 mit den quantenmechanischen Eigenschaften extrem kleiner Schwarzen Löcher [13], deren Schwarzschildradien im Bereich der Plancklänge

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (7.92)$$

liegen. Ein Schwarzes Loch mit noch kleineren Dimensionen kann nicht mehr sinnvoll mit Hilfe der klassischen Schwarzschildlösung beschrieben werden, da es durch Quanteneffekte dominiert wird. Die Masse  $M$  des kleinstmöglichen klassischen Schwarzen Loches mit der Ausdehnung einer Plancklänge liegt in der Größenordnung der Planckmasse  $M_P$ :

$$M \approx M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.18 \cdot 10^{-8} \text{ kg} . \quad (7.93)$$

Diese Masse entspricht etwa  $1.3 \cdot 10^{19}$  Protonenmassen und ist für ein quantenmechanisches Objekt außergewöhnlich groß. Man nimmt allerdings an, daß solche Schwarzen Minilöcher nicht stabil sind und in einem Ausbruch von Hawkingstrahlung verschwinden.

## 7.2 Das Friedmann–Lemaître–Modell

Aleksandr Aleksandrovich Friedmann war ein russischer Physiker und Mathematiker, der im Ersten Weltkrieg als Leiter „Zentralen Aeronautischen Station“ in Kiev eingesetzt war. In dieser Funktion begleitete er Bombenangriffe nicht nur als wissenschaftlicher Berater sondern flog sie auch selbst als Pilot. In der Zeit nach der russischen Revolution und der Formierung der Sowietunion war er Professor in St. Petersburg, wo er sich mit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie beschäftigte. Er entwickelte das kosmologische Modell eines räumlich homogenen Raum–Zeitkontinuums ohne Kosmologische Konstante, dessen Feldgleichungen er exakt lösen konnte. Friedmann veröffentlichte seine Ergebnisse über expandierende und kollabierende Universen 1922 in einem nicht englischsprachigen Journal [14], weswegen seine Arbeit damals nicht den weltweiten Bekanntheitsgrad erlangte, den sie verdient hätte. Einstein selbst vertraute zu dieser Zeit nur statischen kosmologischen Modellen mit einer nicht verschwindenden Kosmologischen Konstante und hielt Friedmanns Resultate zunächst für falsch. Er akzeptierte sie jedoch sofort, als er die Fehlerhaftigkeit seiner eigenen Argumentation erkannte.

Georges Edouard Lemaître war ein belgischer Theologe, der sich mit mathematisch–physikalischen Studien beschäftigte. Nachdem er im Ersten Weltkrieg in der belgischen Armee als Artillerieoffizier gedient hatte, studierte er in den Zwanziger Jahren bei Sir Arthur Eddington in Cambridge unter anderem Kosmologie. Wie Edwin Hubble wurde auch Lemaître auf die Rotverschiebung entfernter astronomischer Objekte aufmerksam, und ohne Friedmanns Arbeiten zu kennen fand er ebenfalls expandierende Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen [15]. Diese Veröffentlichung in einem französischsprachigen Journal blieb wie Friedmanns Arbeiten international weitgehend unbemerkt. Einstein hielt Lemaîtres Lösung mathematisch für korrekt aber physikalisch für falsch, eine Einschätzung, die er 1929 nach Hubbles Entdeckung der Rotverschiebung [16] korrigieren mußte. Lemaître nahm die Idee eines expandierenden Universums ausgesprochen ernst, und indem er die Expansion zeitlich zurückverfolgte wurde er zum ersten Verfechter der Urknallhypothese. Als Theologen und gläubigen Christen war ihm das Urknallszenario durchaus sympathisch, denn es hatte für ihn den Beigeschmack eines göttlichen Schöpfungsaktes.

Das kosmologische Modell von Friedmann und Lemaître beschreibt ein homogenes Universum, das in jedem Raumpunkt dieselben Eigenschaften besitzt. Trotzdem soll es eine zeitliche Entwicklung durchlaufen, welche aufgrund der Strukturlosigkeit des Raumes nur anhand weniger Merkmale festgestellt werden kann. Ein Merkmal ist die geometrische Längenskala, für die es zumindest einen Beobachter und Testteilchen zum Markieren von Raumpunkten geben muß. Natürlich dürfen diese Meßvorrichtungen die Homogenität des Universums nur in verschwindend geringem Maß beeinträchtigen. Ein weiteres prinzipiell beobachtbares Merkmal ist die lokale Krümmung des Raumes, welche ebenfalls die Messung von Längen und Winkeln erfordert.

Das im Friedmann–Lemaître–Modell verwendete Linienelement beschreibt die räumlichen Komponenten in Kugelkoordinaten, die durch einen zeitabhängigen Faktor  $a(t)$  isotrop skaliert werden:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left( dr^2 + f^2(r) (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) \right). \quad (7.94)$$

In dieser Metrik verursacht das Aufquellen bzw. Schrumpfen des Raumes keine Veränderung der räumlichen Koordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $\vartheta$ , weswegen man von einem „mitbewegten“ Koordinatensystem spricht. Der Faktor  $a(t)$  ist die einzige Funktion, die später durch die Feldgleichungen bestimmt werden muß. Der Faktor  $f(r)$  modifiziert die Kugelkoordinaten dergestalt, daß sie sich auch auf gekrümmte homogen–isotrope Räume anwenden lassen. Wir werden diese Konstruktion noch genauer besprechen, im im flachen Raum gilt jedenfalls wie gewohnt

$$f(r) = r. \quad (7.95)$$

Aus (7.94) können wir die Komponenten des Metrischen Tensors ablesen. Da die Koordinatenlinien sich mit der zeitlichen Entwicklung des strukturlosen Raumes mitbewegen, bleiben sie zueinander orthogonal und der Metrische Tensor behält seine Diagonalgestalt. Damit lassen sich die Komponenten des inversen Metrischen Tensors ebenfalls direkt angeben:

$$g_{tt} = \frac{1}{g^{tt}} = c^2 \quad (7.96)$$

$$g_{rr} = \frac{1}{g^{rr}} = -a^2(t) \quad (7.97)$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{g^{\varphi\varphi}} = -a^2(t) f^2(r) \sin^2(\vartheta) \quad (7.98)$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{g^{\vartheta\vartheta}} = -a^2(t) f^2(r). \quad (7.99)$$

### 7.2.1 Festlegung der Funktion $f(r)$

Diese Funktion bestimmt zwar die Struktur des Raumes, in den Feldgleichungen ist sie jedoch keine dynamische Variable und bleibt im Verlauf der zeitlichen Entwicklung unverändert. Wir werden  $f(r)$  nun mit einem anschaulichen geometrischen Kontext hinterlegen, vor dessen Hintergrund sich die Lösungen des Friedmann–Lemaître–Modells einfacher interpretieren lassen.

Das Olbers– Paradoxon über den schwarzen Nachthimmel legt nahe, daß das Universum nicht unendlich ausgedehnt und gleichmäßig mit leuchtenden Sternen besetzt sein kann. Da das Friedmann– Lemaître– Modell jedoch eine solche homogene und isotrope Situation beschreibt, wäre nur ein Universum mit endlichem Volumeninhalt mit dem Olbers– Paradoxon verträglich. Ohne es explizit so auszudrücken beschrieb Friedmann in [14] den Raum als Oberfläche einer vierdimensionalen Hyperkugel und verband auf diese Weise deren Homogenität und Isotropie mit einem endlichen Volumen:

$$V = O_K^{(4)} = 2\pi^2 R^3. \quad (7.100)$$

$R$  ist der Radius dieser Hyperkugel, deren Volumen in einem vierdimensionalen Einbettungsraum

$$V_K^{(4)} = \frac{1}{2}\pi^2 R^4 \quad (7.101)$$

beträgt. Die Metrik dieses flachen Einbettungsraumes lautet in kartesischen Koordinaten

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \quad (7.102)$$

wobei wir  $w$  als vierte räumliche Koordinate eingeführt haben. Die Punkte auf der Hyperkugel sind durch die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (7.103)$$

definiert. Wir werden nun den Übergang zu Kugelkoordinaten betrachten:

$$\{x, y, z, w\} \Rightarrow \{\tilde{r}, \varphi, \vartheta, \chi\}. \quad (7.104)$$

Hierbei ist  $\chi$  eine zusätzliche Winkekkordinate, welche die Werte

$$0 \leq \chi \leq \pi \quad (7.105)$$

annehmen kann. In diesen vierdimensionalen Kugelkoordinaten erfüllen Punkte auf der Hyperkugelfläche die Bedingung

$$\tilde{r} = R. \quad (7.106)$$

Die Umrechnung von Kugel- in kartesische Koordinaten erfolgt durch

$$\begin{aligned}
 x &= \tilde{r} \sin(\chi) \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\
 y &= \tilde{r} \sin(\chi) \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\
 z &= \tilde{r} \sin(\chi) \cos(\vartheta) \\
 w &= \tilde{r} \cos(\chi).
 \end{aligned} \tag{7.107}$$

Wir haben in Abschnitt 3.4.2 demonstriert wie sich die dreidimensionale Standardmetrik von kartesischen in Kugelkoordinaten umrechnen läßt. Dieses Verfahren wenden wir nun auf (7.107) an und erhalten die vierdimensionale Verallgemeinerung des Linienelementes:

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 \left( \sin^2(\chi) (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) + d\chi^2 \right). \tag{7.108}$$

Es handelt sich um die Metrik des hypothetischen vierdimensionalen Raumes, in den der gekrümmte dreidimensionale reale Raum eingebettet sein soll. Das Linienelement (7.94) der Friedmann–Lemaître Raumzeit erhalten wir, indem wir den Raum auf die Oberfläche der vierdimensionalen Hyperkugel einschränken:

$$\tilde{r} = R, \quad d\tilde{r} = 0. \tag{7.109}$$

Das auf diese Oberfläche reduzierte Linienelement erhält somit die Form

$$ds^2 = R^2 d\chi^2 + R^2 \sin^2(\chi) (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2). \tag{7.110}$$

Jetzt ist noch zu klären, welche Bedeutung der Winkel  $\chi$  und der Radius  $R$  für die dreidimensionale Oberfläche der vierdimensionalen Hyperkugel besitzen. Durch die Variation von  $\chi$  fährt man auf dieser Oberfläche ein Stück eines Großkreises ab, welches man dort als Abstand  $r$  zwischen zwei Punkten interpretieren kann:

$$r = R\chi. \tag{7.111}$$

Der Radius  $R$  ist ein Maß für die Krümmung des Oberflächenraumes, welche in Anlehnung an die Gaußsche Krümmung folgendermaßen definiert wird:

$$K = \frac{1}{R^2}. \tag{7.112}$$

Setzen wir die Definitionen (7.111) und (7.112) in das Linienelement (7.110) ein, erhalten wir

$$ds^2 = dr^2 + \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}r) (\sin^2(\vartheta)d\varphi^2 + d\vartheta^2) \quad (7.113)$$

und haben so die Funktion  $f(r)$  mit dem Modell der Oberfläche einer vierdimensionalen Hyperkugel verknüpft:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r). \quad (7.114)$$

Obwohl die Metrik (7.113) aus dem Bild einer vierdimensionalen Hyperkugel unter der Annahme einer positiven Krümmung  $K > 0$  entwickelt wurde, liefert auch die Extrapolation für  $K < 0$  ein interessantes Resultat. Es lassen sich insgesamt drei Fälle unterscheiden:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r) \quad K > 0 \quad (7.115)$$

$$f(r) = r \quad K = 0 \quad (7.116)$$

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r) \quad K < 0. \quad (7.117)$$

Die geometrischen Eigenschaften dieser drei Situationen können wir folgendermaßen beschreiben:

- *Geschlossenes Universum:  $K > 0$*

Die Struktur des Raumes ist elliptisch und sein Volumen ist endlich:

$$V = \frac{2\pi^2}{\sqrt{K}^3}. \quad (7.118)$$

Im Vergleich zum flachen Raum schrumpft die räumliche Skala mit zunehmendem Abstand  $r$ , und es gibt eine größte Entfernung

$$r_m = \frac{\pi}{\sqrt{K}}. \quad (7.119)$$

Das bedeutet, daß man bei Abständen  $r > r_m$  den Zielpunkt über eine andere kürzere Geodäte erreichen kann.

- *Flaches Universum:  $K = 0$*

Das gewohnte flache Universum entsteht aus dem elliptischen Universum im Limes  $K \rightarrow 0$ , indem in (7.113) der Ausdruck  $\sin(\sqrt{K}r)$  für kleine Argumente entwickelt wird. Das Linienelement entspricht nun dem Euklidischen Linienelement in Kugelkoordinaten.

- *Offenes Universum:  $K < 0$*

Die Struktur des Raumes ist hyperbolisch, sein Volumen ist unendlich und Entfernungen sind unbegrenzt. Im Vergleich zum flachen Raum nimmt mit zunehmendem Abstand  $r$  die räumliche Skala überproportional zu.

Alle drei Formen für  $f(r)$  erfüllen die beiden Relationen

$$f'^2 = 1 - Kf^2 \quad (7.120)$$

$$f'' = -Kf. \quad (7.121)$$

Aus diesen lassen sich zwei weitere Beziehungen ableiten, die wir später für die Berechnung des Ricci Tensors benötigen:

$$\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{f^2} = -K \quad (7.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f'}{f}\right) + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{f''}{f} = -K. \quad (7.123)$$

### 7.2.2 Das Robertson– Walker– Linienelement

Wie bereits erwähnt veröffentlichte Friedmann seine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen in einem international wenig gelesenen Journal zu einer Zeit, in der die Kommunikation russischer Wissenschaftler mit dem Rest der akademischen Welt äußerst eingeschränkt war. Seine Arbeit blieb daher weitgehend unbekannt, bis zu Beginn der Dreißiger Jahre der Amerikaner H.P.Robertson [17] und der Engländer A.G.Walker [18] ebenfalls homogene und isotrope Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen untersuchten. Im angloamerikanischen Sprachraum ist das Friedmann– Lemaître– Modell auch eher als „Robertson– Walker– Modell“ bekannt, und in der relativistischen Literatur halten sich beide Bezeichnungen in etwa die Waage; sogar der Ausdruck „Friedmann– Lemaître– Robertson– Walker– Modell“ (FLRW) existiert. Aufgrund der abweichenden Schreibweise wollen wir auch die Robertson– Walker– Form des Linienelementes angeben, die im Unterschied zur Friedmann– Lemaître– Form eine umskalierte radiale Koordinate  $\bar{r}$  verwendet:

$$\bar{r} = f(r), \quad d\bar{r} = f'(r) dr. \quad (7.124)$$

Der Ausdruck  $dr^2$  transformiert sich gemäß

$$dr^2 = \frac{1}{f'^2(r)} d\bar{r}^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - K f^2(r)}, \quad (7.125)$$

wobei wir die Beziehung (7.120) für den Ausdruck  $f'^2(r)$  verwendet haben. Setzen wir dieses in das Friedmann–Lemaître–Linielement ein, erhalten wir dessen Robertson–Walker–Form:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left( \frac{d\bar{r}^2}{1 - K \bar{r}^2} + \bar{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) \right). \quad (7.126)$$

In einem letzten Schritt wird noch der Betrag von  $K$  in umskalierten Variablen absorbiert:

$$\tilde{r} = \sqrt{K} \bar{r}, \quad \tilde{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} a(t). \quad (7.127)$$

Die endgültige Form der Robertson–Walker–Metrik lautet somit

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \tilde{a}^2(t) \left( \frac{d\tilde{r}^2}{1 - k \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 (\sin^2(\vartheta) d\varphi^2 + d\vartheta^2) \right) \quad (7.128)$$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{Universum geschlossen} \\ 0 & \text{Universum flach} \\ -1 & \text{Universum offen.} \end{cases}$$

Für die kommenden Rechnungen werden wir jedoch weiterhin das Friedmann–Lemaître–Linielement (7.94) zusammen mit der im vorigen Abschnitt hergeleiteten Form der Funktion  $f(r)$  verwenden.

### 7.2.3 Berechnung der Christoffelsymbole

Die Berechnung der Christoffelsymbole erfolgt mit Hilfe der Lagrangefunktion des freien Teilchens, welche wir aus (7.94) konstruieren, indem wir alle Koordinaten als Funktionen eines Kurvenparameters  $\lambda$  auffassen:

$$\begin{aligned} t &= t(\lambda), & r &= r(\lambda), & \varphi &= \varphi(\lambda), & \vartheta &= \vartheta(\lambda) \\ \dot{t} &= \frac{dt}{d\lambda}, & \dot{r} &= \frac{dr}{d\lambda}, & \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{d\lambda}, & \dot{\vartheta} &= \frac{d\vartheta}{d\lambda} \\ L_p &= c^2 \dot{t}^2 - a^2(t) \left( \dot{r}^2 + f^2(r) (\sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \right). \end{aligned} \quad (7.129)$$

Die Ableitungen dieser Lagrangefunktion nach den Koordinaten und deren „Geschwindigkeiten“ lauten:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{t}} = 2c^2 \dot{t} \qquad \frac{\partial L_p}{\partial t} = -2aa' \left( \dot{r}^2 + f^2 \left( \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) \right) \quad (7.130)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{r}} = -2a^2 \dot{r} \qquad \frac{\partial L_p}{\partial r} = -2a^2 f f' \left( \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) \quad (7.131)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{\varphi}} = -2a^2 f^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} \qquad \frac{\partial L_p}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.132)$$

$$\frac{\partial L_p}{\partial \dot{\vartheta}} = -2a^2 f^2 \dot{\vartheta} \qquad \frac{\partial L_p}{\partial \vartheta} = -2a^2 f^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2. \quad (7.133)$$

Um die Ausdrücke kompakt zu halten, haben wir die folgende Schreibweise verwendet:

$$a' := \frac{d}{dt} a(t) \qquad f' := \frac{d}{dr} f(r). \quad (7.134)$$

Dieses ist eindeutig, da die Funktionen  $a(t)$  und  $f(r)$  nur von einer Variablen abhängen. Die Euler–Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_p}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L_p}{\partial x^\mu} = 0 \quad (7.135)$$

lauten für das Friedman–Lemaître–Linienelement:

$$\ddot{t} + \frac{1}{c^2} aa' \left( \dot{r}^2 + f^2 \left( \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) \right) = 0 \quad (7.136)$$

$$\ddot{r} + 2 \frac{a}{a'} \dot{t} \dot{r} - f^2 \left( \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \right) = 0 \quad (7.137)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \frac{a}{a'} \dot{t} \dot{\varphi} + 2 \frac{f}{f'} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} = 0 \quad (7.138)$$

$$\ddot{\vartheta} + 2 \frac{a}{a'} \dot{t} \dot{\vartheta} + 2 \frac{f}{f'} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (7.139)$$

Aus diesen Euler– Lagrangeschen Gleichungen lassen sich die Christoffelsymbole ablesen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{c^2} aa' & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= \frac{1}{c^2} aa' f^2 \sin^2(\vartheta) & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^t &= \frac{1}{c^2} aa' f^2 \\
\Gamma_{tr}^r &= \frac{a'}{a} & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -ff' \sin^2(\vartheta) & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -ff' \\
\Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \frac{a'}{a} & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{f'}{f} & \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi &= \cot(\vartheta) \\
\Gamma_{t\vartheta}^\vartheta &= \frac{a'}{a} & \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \frac{f'}{f} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta).
\end{aligned} \tag{7.140}$$

In Abschnitt 7.2.1 haben wir gesehen, daß die Funktion  $f(r)$  für unterschiedliche Krümmungseigenschaften des Universums unterschiedliche Formen annimmt. Es ist daher sinnvoll, die folgenden Rechnungen mit unbestimmtem  $f(r)$  durchzuführen und die konkrete Form des räumlichen Teils der Metrik erst zu einem späteren Zeitpunkt einzusetzen.

#### 7.2.4 Berechnung des Ricci– und des Einsteintensors

Der nächste logische Schritt wäre die Berechnung der 20 wesentlichen Komponenten des Riemann– Christoffelschen Krümmungstensors

$$R^\kappa{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma^\kappa{}_{\sigma\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \Gamma^\kappa{}_{\rho\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}. \tag{7.141}$$

Diese Komponenten im Vorfeld bereitzustellen ist jedoch unzweckmäßig, weil wir nicht die  $R^\kappa{}_{\nu\rho\sigma}$  selbst benötigen sondern nur deren Kontraktion in Form des Ricci Tensors. Es ist daher geschickter, sich auf die im Ricci Tensor  $R_{\mu\nu}$  tatsächlich vorkommenden Komponenten des Krümmungstensors zu beschränken. Für die Diagonalelemente des Ricci Tensors müssen zwölf Krümmungstensorkomponenten berechnet werden:

$$R_{tt} = R^r{}_{trt} + R^\varphi{}_{t\varphi t} + R^\vartheta{}_{t\vartheta t} \tag{7.142}$$

$$R_{rr} = R^t{}_{rtr} + R^\varphi{}_{r\varphi r} + R^\vartheta{}_{r\vartheta r} \tag{7.143}$$

$$R_{\varphi\varphi} = R^t{}_{\varphi t\varphi} + R^r{}_{\varphi r\varphi} + R^\vartheta{}_{\varphi\vartheta\varphi} \tag{7.144}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = R^t{}_{\vartheta t\vartheta} + R^r{}_{\vartheta r\vartheta} + R^\varphi{}_{\vartheta\varphi\vartheta}. \tag{7.145}$$

Wir ermitteln die  $R^\kappa{}_{\nu\kappa\sigma}$  mit Hilfe der Christoffelsymbole (7.140):

Komponente  $R_{tt}$ :

$$R^r{}_{trt} = -\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{tr}^r - \Gamma_{tr}^r{}^2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad (7.146)$$

$$R^\varphi{}_{t\varphi t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{t\varphi}^\varphi - \Gamma_{t\varphi}^\varphi{}^2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad (7.147)$$

$$R^\vartheta{}_{t\vartheta t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{t\vartheta}^\vartheta - \Gamma_{t\vartheta}^\vartheta{}^2 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad (7.148)$$

Komponente  $R_{rr}$ :

$$R^t{}_{rtr} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{rr}^t - \Gamma_{rr}^t\Gamma_{tr}^r = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)a^2 \quad (7.149)$$

$$\begin{aligned} R^\varphi{}_{r\varphi r} &= -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_{r\varphi}^\varphi + \Gamma_{t\varphi}^\varphi\Gamma_{rr}^t - \Gamma_{r\varphi}^\varphi{}^2 \quad (7.150) \\ &= \frac{1}{c^2}a'^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{1}{c^2}a'^2 + K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^\vartheta{}_{r\vartheta r} &= -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma_{r\vartheta}^\vartheta + \Gamma_{t\vartheta}^\vartheta\Gamma_{rr}^t - \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta{}^2 \quad (7.151) \\ &= \frac{1}{c^2}a'^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \frac{1}{c^2}a'^2 + K \end{aligned}$$

Komponente  $R_{\varphi\varphi}$ :

$$R^t{}_{\varphi t\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{\varphi\varphi}^t - \Gamma_{\varphi\varphi}^t\Gamma_{t\varphi}^\varphi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)a^2 f^2 \sin^2(\vartheta) \quad (7.152)$$

$$\begin{aligned} R^r{}_{\varphi r\varphi} &= \frac{\partial}{\partial r}\Gamma_{\varphi\varphi}^r - \Gamma_{\varphi\varphi}^r\Gamma_{r\varphi}^\varphi + \Gamma_{tr}^\varphi\Gamma_{\varphi\varphi}^t \quad (7.153) \\ &= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)f^2 \sin^2(\vartheta) \\ &= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 + K\right)f^2 \sin^2(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\vartheta_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^\vartheta + \Gamma_{t\vartheta}^\vartheta\Gamma_{\vartheta\vartheta}^t + \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r - \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\vartheta\Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi \\
&= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2}\right)f^2\sin^2(\vartheta) \\
&= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 + K\right)f^2\sin^2(\vartheta)
\end{aligned} \tag{7.154}$$

Komponente  $R_{\vartheta\vartheta}$ :

$$R^t_{\vartheta t\vartheta} = \frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^t - \Gamma_{\vartheta\vartheta}^t\Gamma_{t\vartheta}^\vartheta = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)a^2f^2 \tag{7.155}$$

$$\begin{aligned}
R^r_{\vartheta r\vartheta} &= \frac{\partial}{\partial r}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r + \Gamma_{t\vartheta}^r\Gamma_{\vartheta\vartheta}^t - \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r\Gamma_{r\vartheta}^\vartheta \\
&= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right)f^2 = \left(\frac{1}{c^2}a'^2 + K\right)f^2
\end{aligned} \tag{7.156}$$

$$\begin{aligned}
R^\varphi_{\vartheta\varphi\vartheta} &= -\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi + \Gamma_{t\vartheta}^\varphi\Gamma_{\vartheta\vartheta}^t + \Gamma_{r\vartheta}^\varphi\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r - \Gamma_{\vartheta\vartheta}^\varphi{}^2 \\
&= \left(\frac{1}{c^2}a'^2 - \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2}\right)f^2 = \left(\frac{1}{c^2}a'^2 + K\right)f^2
\end{aligned} \tag{7.157}$$

Aus diesen Bestandteilen setzen sich die Diagonalelemente die Ricci Tensors folgendermaßen zusammen:

$$R_{tt} = -3\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right) \tag{7.158}$$

$$R_{rr} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2c^2\frac{K}{a^2}\right)a^2 \tag{7.159}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2c^2\frac{K}{a^2}\right)a^2f^2\sin^2(\vartheta) \tag{7.160}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a'}{a}\right) + 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + 2c^2\frac{K}{a^2}\right)a^2f^2 \tag{7.161}$$

Da sämtliche bisher noch nicht berechneten Komponenten  $R^{\kappa}_{\nu\rho\sigma}$  des Riemann–Christoffelschen Krümmungstensors verschwinden, verschwinden auch die Nichtdiagonalelemente von  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu. \quad (7.162)$$

Die Skalare Krümmung  $R$  erhalten wir aus der Spur des Ricci Tensors:

$$\begin{aligned} R &= g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} + g^{\vartheta\vartheta}R_{\vartheta\vartheta} \\ &= -\frac{6}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 2 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (7.163)$$

Mit Hilfe des Ricci Tensors und der Skalaren Krümmung können wir die vier Diagonalelemente des Einsteintensors

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} R \quad (7.164)$$

konstruieren. Wie der Ricci Tensor und die Metrik besitzt auch der Einsteintensor Diagonalgestalt. Seine Komponenten lauten:

$$G_{tt} = 3 \left( \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) \quad (7.165)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{c^2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) a^2 \quad (7.166)$$

$$G_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{c^2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) a^2 f^2 \sin^2(\vartheta) \quad (7.167)$$

$$G_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{c^2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) a^2 f^2. \quad (7.168)$$

### 7.2.5 Energie– Impulstensor einer idealen Flüssigkeit

Um die Feldgleichungen aufstellen zu können fehlt uns noch ein Modell für die Energie–Impulsverteilung im Universum. Da auch die Quellen des Gravitationsfeldes der vorgegebenen Symmetrie gerecht werden müssen handelt es sich um ein homogen und

isotrop verteiltes Medium, das wir aus Gründen der Einfachheit als nicht viskos annehmen. Damit hat es die Eigenschaften einer idealen Flüssigkeit und besitzt zwei charakteristische Größen:

$$\begin{aligned}\rho(t) &: \text{ Energiedichte} \\ p(t) &: \text{ Druck.}\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Energie– Impulstensor  $T^{\mu\nu}$  im ungekrümmten Minkowski-Raum der Speziellen Relativitätstheorie, der im Ruhesystem der Flüssigkeit folgende Gestalt annimmt:

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (7.169)$$

Für gewöhnlich läßt sich kein Inertialsystem finden in welchem die Flüssigkeit global in Ruhe ist, so daß die Form (7.169) nur für bestimmte Raumpunkte gelten kann. Unser Ziel ist eine Darstellung des Energie– Impulstensors, welche sich leicht auf die gekrümmte Geometrie des Friedmann– Lemaître– Modells übertragen läßt. Zunächst transformieren wir (7.169) mit Hilfe der Lorentztransformation

$$[\Lambda^{\mu'}_{\nu}] = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (7.170)$$

in ein Bezugssystem, in dem sich die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit  $\underline{v}$  bewegt, wobei wir uns auf eine Raumdimension beschränken. Aufgrund der Homogenität des Friedmann– Lemaître– Modells ist die anschließende Erweiterung auf drei Raumdimensionen problemlos durchführbar. Um den gewünschten Effekt zu erzielen muß die Lorentztransformation mit der negativen Geschwindigkeit durchgeführt werden, was in (7.170) bereits berücksichtigt ist. Die Faktoren  $\beta$  und  $\gamma$  haben die gewohnte aus der Speziellen Relativitätstheorie bekannte Bedeutung:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (7.171)$$

Der auf diese Weise transformierte Energie– Impulstensor lautet

$$[T^{\mu'\nu'}] = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} \rho + \beta^2 p & \beta(\rho + p) \\ \beta(\rho + p) & \beta^2 \rho + p \end{pmatrix}. \quad (7.172)$$

Wir schreiben die Matrixelemente nun in einer Weise um, daß sich ein diagonaler Anteil abspalten läßt:

$$\begin{aligned}
[T^{\mu\nu}] &= \gamma^2 \begin{pmatrix} \rho + p - (1 - \beta^2)p & \beta(\rho + p) \\ \beta(\rho + p) & \beta^2(\rho + p) + p(1 - \beta^2) \end{pmatrix} \\
&= \gamma^2 \begin{pmatrix} \rho + p & \beta(\rho + p) \\ \beta(\rho + p) & \beta^2(\rho + p) \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{c^2} (\rho + p) \gamma^2 \begin{pmatrix} c^2 & cv \\ cv & v^2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.173}$$

In dem eingeschränkten Minkowskiraum mit einer Raumdimension lauten die kontravarianten Komponenten des Metrischen Tensors

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{7.174}$$

und die Vierergeschwindigkeit  $\underline{u}$  hat die Gestalt

$$[u^\mu] = \gamma \begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix}. \tag{7.175}$$

Mit Hilfe von (7.174) und (7.175) können wir die Elemente  $T^{\mu\nu}$  in Tensorschreibweise zusammenfassen:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c^2} (\rho + p) \underline{u} \otimes \underline{u} - p \mathbf{g}. \tag{7.176}$$

Diese Form des Energie– Impulstensors gilt nicht nur im vierdimensionalen Minkowskiraum, sie bleibt auch beim Übergang zu gekrümmten Koordinaten gültig. Bei der Verwendung von (7.176) im Friedmann– Lemaître– Modell ist das dort eingeführte mitbewegte Koordinatensystem zu berücksichtigen, in welchem die Vierergeschwindigkeit die Gestalt

$$[u^\mu] = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.177}$$

besitzt und die Koordinate  $t$  die Bedeutung der Eigenzeit des betreffenden Raumpunktes hat. Diese Konstruktion ist nur aufgrund der hohen Symmetrie des Modells

möglich, das letztendlich nur die Dynamik eines einzelnen Raumpunktes innerhalb seiner unmittelbaren Umgebung beschreibt. Die kovarianten Komponenten des Energie-Impulstensors lauten:

$$T_{tt} = \frac{1}{c^2} (\rho + p) u_0^2 - p g_{tt} = \rho \quad (7.178)$$

$$T_{rr} = -p g_{rr} = p a^2 \quad (7.179)$$

$$T_{\varphi\varphi} = -p g_{\varphi\varphi} = p a^2 f^2 \sin^2(\vartheta) \quad (7.180)$$

$$T_{\vartheta\vartheta} = -p g_{\vartheta\vartheta} = p a^2 f^2. \quad (7.181)$$

## 7.2.6 Die Friedmanngleichungen

Da uns jetzt der Einsteintensor und der Energie-Impulstensor für das Friedmann-Lemaître-Modell bekannt sind, können wir die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu} \quad (7.182)$$

aufstellen. Alle in (7.182) vorkommenden Tensoren haben Diagonalgestalt, und somit reduziert sich die Zahl der Feldgleichungen von 10 auf 4. Die Homogenität des Raumes führt dazu, daß die Diagonalelemente für  $r$ ,  $\varphi$  und  $\vartheta$  identische Feldgleichungen generieren und daß nur noch zwei Gleichungen übrigbleiben:

$$3 \frac{1}{c^2} \left( \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) - \Lambda = \kappa \rho \quad (7.183)$$

$$\frac{1}{c^2} \left( 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + c^2 \frac{K}{a^2} \right) - \Lambda = -\kappa p. \quad (7.184)$$

Dieses sind die **Friedmanngleichungen**, die in Lehrbüchern wie [6] [7] nicht notwendigerweise in dieser Gestalt präsentiert werden. Setzt man (7.183) in Gleichung (7.184) ein, erhält man eine im Internet häufig anzutreffende Variante:

$$\left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{1}{3} \kappa c^2 \rho - c^2 \frac{K}{a^2} + \frac{1}{3} c^2 \Lambda \quad (7.185)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{1}{6} \kappa c^2 (\rho + 3p) + \frac{1}{3} c^2 \Lambda. \quad (7.186)$$

Weil die beiden Friedmanngleichungen drei Größen  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  und  $p(t)$  bestimmen sollen, müssen sie noch durch eine weitere Beziehung ergänzt werden. Es handelt sich hierbei um die Zustandsgleichung der Materie

$$\rho = \rho(p), \quad (7.187)$$

in welcher die Energiedichte  $\rho$  und der Druck  $p$  den Eigenschaften der gravitierenden Substanz entsprechend miteinander in Beziehung gebracht werden.

### 7.2.7 Das statische Universum Einsteins

Als Einstein im Jahr 1915 die Allgemeine Relativitätstheorie veröffentlichte war die Milchstraße die einzige bekannte Galaxie. Man nahm an, daß sie sämtliche stellare Materie umfaßte, denn extragalaktische Objekte mit von der Milchstraße abweichenden Bewegungsparametern hatte man noch nicht entdeckt. Somit gab es für Einstein nur ein sinnvolles kosmologisches Modell, nämlich das permanent bestehende statische Universum mit endlicher Ausdehnung, um dem Olbers– Paradoxon gerecht zu werden. Vor diesem Hintergrund betrachtet ist Einsteins Suche nach einer stationären Lösung seiner Feldgleichungen durchaus nachvollziehbar. Im Friedmann– Lemaître– Modell übersetzt sich Zeitunabhängigkeit in

$$a = 1, \quad a' = a'' = 0. \quad (7.188)$$

Mit diesen Vorgaben lauten die Friedmanngleichungen

$$3K - \Lambda = \kappa \rho \quad (7.189)$$

$$K - \Lambda = -\kappa p. \quad (7.190)$$

Man erkennt sofort, daß die Kosmologische Konstante für eine physikalisch sinnvolle Lösung dieses Gleichungssystems notwendig ist, denn ein verschwindendes  $\Lambda$  führt führt zur Zustandsgleichung  $\rho = -3p$  und somit wahlweise zu einer negativen Energiedichte oder zu einem negativen Druck. Eliminiert man jeweils  $\Lambda$  bzw.  $K$ , erhält man

$$2K = \kappa(\rho + p) \quad (7.191)$$

$$2\Lambda = \kappa(\rho + 3p). \quad (7.192)$$

Im Folgenden beschränken wir uns auf sogenannten **kosmischen Staub**, der durch die Zustandsgleichung

$$p = 0 \quad (7.193)$$

beschrieben wird. Diese Zustandsgleichung ist in einer räumlichen Skala gerechtfertigt, welche Galaxienhaufen um Größenordnungen übersteigt und in der eine homogen-isotrope Beschreibung der Materie realistisch ist. Der Aufbau eines globalen Druckes  $p$  paßt nicht zu einem Materiemodell von Galaxien oder Galaxienhaufen, die in große leere Raumgebiete eingebettet sind. Für den kosmischen Staub gilt:

$$K = \Lambda = \frac{1}{2}\kappa\rho = \frac{4\pi}{c^4}G\rho. \quad (7.194)$$

Durch die Krümmung  $K$  wird sowohl der **Einsteinradius**  $R_E$  dieses statischen Universums im vierdimensionalen Einbettungsraum als auch dessen Gesamtvolumen  $V_E$  festgelegt:

$$R_E = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = \frac{c^2}{2\sqrt{\pi G\rho}} \quad (7.195)$$

$$V_E = 2\pi^2 R_E^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left( \frac{c^2}{\sqrt{G\rho}} \right)^3. \quad (7.196)$$

Die Kosmologische Konstante ist hier kein freier Parameter sondern wird durch die Energiedichte  $\rho$  und den Druck  $p$  festgelegt. Diese zwangsweise Feinabstimmung der geometrischen und materiellen Größen war schon 1915 diskussionswürdig, und weitere astronomische Entdeckungen ließen in den Zwanziger Jahren schwerwiegende Bedenken gegen stationäre kosmologische Modelle aufkommen. Es wurden Galaxien außerhalb der Milchstraße identifiziert, die in ihrem Spektrum eine um so größere Rotverschiebung aufwiesen je weiter sie von der Erde entfernt waren [16]. Dieses 1929 von Edwin Hubble entdeckte Phänomen ließ sich als Zeichen für eine Expansion des Universums im globalen Maßstab deuten. Einsteins stationäre Lösung beschrieb offenbar nicht den momentanen realen Zustand des Raumes, und als Sir Arthur Eddington 1930 nachwies daß Einsteins stationäre Lösung instabil ist, mußte die Idee eines statischen Universums endgültig aufgegeben werden.

### 7.2.8 Das strahlungsdominierte Universum

Im heute allgemein akzeptierten Standardmodell der Kosmologie wird der überwiegende Teil der Energiedichte und des Druckes im frühen Universums durch elektromagnetische Strahlung verursacht, während der Beitrag baryonischer Materie zum Energie-Impulstensor nur etwa 5% ausmacht. Letztere hat die Form eines Plasmas, da Elektronen und Wasserstoff- bzw. Heliumkerne (schwerere Elemente gab es zu dieser Zeit nicht) sich aufgrund der hohen Temperaturen ungebunden bewegen. Plasma absorbiert Licht aller Wellenlängen, wodurch den Photonen nur eine verhältnismäßig geringe freie

Weglänge zur Verfügung steht. Ein Beobachter hätte in diesem Universum einen milchigen Helligkeitseindruck gehabt ohne Objekte über größere Entfernungen wahrnehmen zu können. Als das Universum ein Alter von etwa  $4 \cdot 10^5$  Jahren erreicht hatte, änderte sich dieses Verhalten schlagartig. Baryonische Materie und Elektronen rekombinierten in globalem Ausmaß und formten neutrale Atome, wodurch das Universum durchsichtig wurde. Zu diesem Zeitpunkt war die Strahlung nicht mehr der dominierende Faktor, da etwa  $10^4$  Jahre nach dem Urknall der Strahlungsanteil der Energiedichte unter den Materieanteil gesunken war. Die zum Zeitpunkt dieser globalen Rekombination abgeschickten Photonen bilden heute die kosmische Hintergrundstrahlung. Vorgänge zu früheren Zeiten mögen zwar durchaus innerhalb unseres Ereignishorizontes liegen, allerdings konnten sie sich nicht durch das Aussenden langreichweitiger Photonen bemerkbar machen. Aus diesem Grund stellt die Hintergrundstrahlung das früheste für uns beobachtbare Ereignis im Kosmos dar. Das junge Universum bis zur Zeit von  $10^4$  Jahren nach dem Urknall wird als **strahlungsdominiert** bezeichnet.

Um die Friedmangleichungen für das strahlungsdominierte Universum lösen zu können, benötigen wir die Zustandsgleichung elektromagnetischer Strahlung. Wir betrachten zu diesem Zweck Photonen einer Teilchendichte  $n$ , die an einer verspiegelten Wand der Fläche  $A$  reflektiert werden und somit auf diese einen Druck  $p$  ausüben. Wenn wir davon ausgehen, daß im Zeitintervall  $\delta t$  nur diejenigen Photonen die Wand erreichen, die sich innerhalb des Abstandes  $c \delta t$  befinden, müssen wir alle Photonen im „Reaktionsraum“  $A \cdot c \delta t$  berücksichtigen. Im Durchschnitt werden sich  $N_{ph}$  Photonen mit

$$N_{ph} = \frac{1}{6} n A c \delta t \quad (7.197)$$

auf die Wand zubewegen und dort bei der Reflektion jeweils einen Impuls von

$$\delta P_k = 2 \hbar k \quad (7.198)$$

übertragen. Sämtliche auf die Wand auftreffenden Photonen erzeugen daher eine Kraft von

$$F_{ph} = pA = N_{ph} \frac{\delta P_k}{\delta t} = \frac{1}{3} n A c \hbar k. \quad (7.199)$$

Da bei einem Photon die Wellenzahl  $k$  einer Frequenz  $\omega = ck$  entspricht, können wir auch

$$F_{ph} = pA = \frac{1}{3} n A \hbar \omega \quad (7.200)$$

schreiben. Die Frequenz hängt schließlich mit der Energiedichte  $\rho$  zusammen über

$$\rho = n \hbar \omega, \quad (7.201)$$

welches wir in (7.200) einsetzen:

$$F_{ph} = pA = \frac{1}{3}\rho A. \quad (7.202)$$

Diese Beziehung ist die gesuchte Zustandsgleichung elektromagnetischer Strahlung:

$$\rho = 3p. \quad (7.203)$$

Damit bekommen die Friedmanngleichungen (7.185) und (7.186) für das strahlungsdominierte Universum ohne kosmologisches Glied die Gestalt

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \hat{\kappa}p - \frac{\hat{K}}{a^2} \quad (7.204)$$

$$\frac{a''}{a} = -\hat{\kappa}p, \quad (7.205)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\hat{K} = c^2 K, \quad \hat{\kappa} = c^2 \kappa \quad (7.206)$$

verwendet haben. Ersetzen wir in (7.204) das Glied  $\hat{\kappa}p$  durch (7.205) erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $a(t)$ :

$$\frac{a''}{a} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{\hat{K}}{a^2} = 0 \quad (7.207)$$

$$a a'' + a'^2 = -\hat{K} \quad (7.208)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(a a') = -\hat{K} \quad (7.209)$$

Aus der letzten Gleichung (7.209) kann das erste Integral direkt bestimmt werden:

$$a(t) a'(t) = a(t_0) a'(t_0) - \hat{K}(t - t_0). \quad (7.210)$$

Dieses ist eine separable Differentialgleichung erster Ordnung in  $t$ , welche bereits in separierter Form vorliegt und somit die analytische Lösung der Friedmanngleichungen für das strahlungsdominierte Universum ermöglicht:

$$a(t) = \sqrt{a^2(t_0) + 2a(t_0) a'(t_0)(t - t_0) - \hat{K}(t - t_0)^2}. \quad (7.211)$$

Auf der Grundlage dieses Resultates lassen sich einige interessante kosmologische Begriffe diskutieren:

Die Entwicklung in den Big Crunch:

Die räumliche Skalenfunktion  $a(t)$  wird Gleichung (7.211) zufolge für kleine Zeiten  $t-t_0$  durch den linearen Term unter der Wurzel bestimmt, der zur Anfangsgeschwindigkeit  $a'(t_0)$  proportional ist. In einem gekrümmten Universum mit  $\hat{K} \neq 0$  gewinnt jedoch mit fortschreitender Zeit der quadratische Term die Oberhand, wodurch sich bei einem geschlossenen Universum

$$\hat{K} > 0, \quad a'(t_0) > 0 \quad (7.212)$$

ein interessanter Zeitverlauf ergibt. Während zunächst die positive Anfangsgeschwindigkeit das Universum expandieren läßt, erzwingt der Krümmungsterm schließlich den Rückgang auf  $a = 0$ . Dieser Zusammenbruch der Längenskala trägt den Namen **Big Crunch**, dessen Zeitpunkt  $t_{\text{cr}}$  durch die quadratische Gleichung

$$a^2(t_0) + 2b(t_0)(t_{\text{cr}} - t_0) - \hat{K}(t_{\text{cr}} - t_0)^2 = 0 \quad (7.213)$$

festgelegt wird. Wir haben in (7.213) die Geschwindigkeit  $a'(t_0)$  durch den Parameter

$$b(t_0) = a(t_0)a'(t_0), \quad \lim_{a(t_0) \rightarrow 0} b(t_0) \sim \text{const.} \quad (7.214)$$

ersetzt, wobei der in (7.214) angegebene Limes von  $b(t_0)$  für verschwindendes  $a(t_0)$  eine Eigenschaft der Wurzelfunktion ist. Die in der Zukunft liegende positive Lösung von (7.213) lautet

$$t_{\text{cr}} - t_0 = \frac{b(t_0)}{\hat{K}^2} \left( 1 + \sqrt{1 + a^2(t_0) \frac{\hat{K}^2}{b^2(t_0)}} \right), \quad (7.215)$$

oder falls das Universum zur Zeit  $t = t_0 = 0$  mit einem Urknall  $a(0) = 0$  startet:

$$t_{\text{cr}} = 2 \frac{b_0}{\hat{K}^2}. \quad (7.216)$$

In diesem Fall ist  $t_{\text{cr}}$  die Zeit zwischem dem anfänglichen Big Bang und dem darauf folgenden Big Crunch.

Der Hubble-Parameter  $H(t)$ :

In der Kosmologie und der Astrophysik wird gerne der von der Skalenfunktion  $a(t)$  abgeleitete **Hubble-Parameter**

$$H(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} \quad (7.217)$$

verwendet, da dieser einen direkten Bezug zu meßbaren Größen wie der Rotverschiebung entfernter Galaxien hat. Diese Funktion läßt sich aus Gleichung (7.211) errechnen, indem wir zunächst die Ableitung bilden:

$$a'(t) = \frac{1}{a(t)} \left( b(t_0) - \hat{K}(t - t_0) \right), \quad (7.218)$$

wobei wir wieder  $b(t_0) = a(t_0) a'(t_0)$  verwendet haben. Damit lautet der Hubble-Parameter

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{1}{a^2(t)} \left( b(t_0) - \hat{K}(t - t_0) \right) \\ &= \frac{b(t_0) - \hat{K}(t - t_0)}{a^2(t_0) + 2b(t_0)(t - t_0) - \hat{K}(t - t_0)^2}. \end{aligned} \quad (7.219)$$

Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_E$  wird dieser Hubble-Parameter innerhalb der betrachteten Epoche mit

$$H_E := H(t_E) = \frac{a'(t_E)}{a(t_E)} \quad (7.220)$$

zur Hubble-Konstanten. Zwar ist die Funktion  $H(t)$  keine Konstante im strengen Sinn, sie wird aber üblicherweise als zur Zeit nahezu konstant behandelt. Allerdings kann Gleichung (7.219) nicht zur Analyse der gegenwärtigen Hubble-Parameterfunktion verwendet werden, weil das Universum heute nicht mehr strahlungsdominiert ist.

Die Energiedichte  $\rho(t)$ :

Die zeitliche Entwicklung der Energiedichte  $\rho(t)$  läßt sich mit Hilfe des Druckes  $p(t)$  und der Zustandsgleichung (7.203) aus der ersten Friedmanngleichung (7.204) bestimmen, indem  $a(t)$  aus Gleichung (7.211) übernommen wird:

$$\rho(t) = \frac{1}{a^4(t)} \frac{3}{\hat{\kappa}} \left( b^2(t_0) + \hat{K} a^2(t_0) \right). \quad (7.221)$$

Die triviale Abhängigkeit der Energiedichte von der Volumenskala

$$\rho \sim \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}}, \quad \sqrt{-|\mathbf{g}|} = c a^3(t) f^2(r) \sin^2(\vartheta) \quad (7.222)$$

ließe  $\rho(t) \sim a^{-3}(t)$  erwarten. Da jedoch durch das „aufquellen“ des Raumes die Wellenlänge der Photonen proportional mit  $a(t)$  zunimmt, muß auch diese Abhängigkeit der Energiedichte von der Längenskala berücksichtigt werden, und es gilt  $\rho(t) \sim a^{-4}(t)$ .

Zusammenfassung:

Schließlich geben wir noch einmal diejenigen Merkmale des strahlungsdominierten Universums an, welche für die Entwicklung kurz nach dem Urknall gelten und die in der Literatur häufig zitiert werden:

$$a(t) \stackrel{t \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{2b_0} \sqrt{t} \sim \sqrt{t} \quad (7.223)$$

$$\rho(t) = 3 \frac{b_0^2}{\hat{\kappa}} \frac{1}{a^4(t)} \sim \frac{1}{a^4(t)}. \quad (7.224)$$

### 7.2.9 Das materiedominierte Universum

Dem Standardmodell der Kosmologie zufolge galt das Universum als materiedominiert, was bedeutet, daß die wesentlichen Beiträge zum Energie– Impulstensor aus baryonischer Materie stammen. Diese Vorstellung bestand seit Einsteins Zeiten und kam erst 1998 ins Wanken, als Leuchtkraftmessungen an Supernovae des Typs Ia nahelegten, daß das Universum schwach exponentiell expandiert [19]. Als sinnvolles Modell der Materie des homogen und isotrop mit Galaxien und Sternen gefüllten Raumes verwenden wir den schon bei der Diskussion des statischen Universums in Abschnitt 7.2.7 eingeführten kosmischen Staub:

$$p = 0. \quad (7.225)$$

Mit dieser Zustandsgleichung lauten die Friedmanngleichungen ohne kosmologisches Glied

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\kappa c^2 \rho - c^2 \frac{K}{a^2} \quad (7.226)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{1}{6}\kappa c^2 \rho. \quad (7.227)$$

Ersetzen wir in (7.226) den Term mit der Energiedichte  $\rho$  durch (7.227), erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für den Skalenfaktor  $a(t)$ :

$$2a a'' + a'^2 + \hat{K} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Nach Multiplikation mit } a^2 \quad (7.228)$$

$$2a a' a'' + a'^3 + \hat{K} a' = 0 \quad \Leftrightarrow a' - \text{Trick} \quad (7.229)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (a a'^2 + \hat{K} a) = 0 \quad (7.230)$$

Aus der letzten Gleichung (7.230) läßt sich das erste Integral direkt bestimmen:

$$a(t) a(t)'^2 + \hat{K} a(t) = a(t_0) a(t_0)'^2 + \hat{K} a(t_0) =: A_0. \quad (7.231)$$

Für die von den Anfangswerten  $a(t_0)$  und  $a(t_0)'$  abhängige Integrationskonstante haben wir die abkürzende Bezeichnung  $A_0$  eingeführt. Nach (7.231) verläuft die Bewegung von  $a(t)$  dergestalt, daß bei einer Annäherung an  $a = 0$  der folgende Ausdruck endlich bleibt:

$$\lim_{a(t) \rightarrow 0} a(t) a'^2(t) = A_0 \sim \text{const.} \quad (7.232)$$

Gleichung (7.231) kann in einer Form geschrieben werden, die unter Verwendung einer physikalischen Analogie anschaulich interpretiert werden kann:

$$a(t)'^2 - \frac{A_0}{a(t)} = -\hat{K}. \quad (7.233)$$

Dieses ist der Energieerhaltungssatz für ein Teilchen in einem eindimensionalen Gravitationspotential, wenn wir die Terme dieser Gleichung mit folgenden Begriffen verbinden:

$a(t)$ :	Ortskoordinate
$a(t)'$ :	Geschwindigkeit
$a(t)'^2$ :	Kinetische Energie
$-A_0/a(t)$ :	Potentielle Energie
$-\hat{K}$ :	Gesamtenergie

Die gebundene oder ungebundene Bewegung eines Teilchens in diesem Potential entspricht der Situation eines geschlossenen oder offenen Universums:

- *Gesamtenergie negativ:  $K > 0$*

Die Bewegung des Teilchens ist gebunden, es kann sich nur bis zu einem maximalen Abstand

$$a_{\max} = \frac{A_0}{\hat{K}} \quad (7.234)$$

vom Ursprung wegbewegen. Damit hat auch das Universum eine größte Ausdehnung und kollabiert anschließend in einem Big Crunch. Das Universum ist somit geschlossen.

- *Gesamtenergie verschwindet:  $K = 0$*

Dieses ist der Grenzfall zwischen gebundener und ungebundener Bewegung, in dem das Teilchen sich unendlich weit vom Ursprung entfernen kann. Das Universum ist nicht geschlossen und ungekrümmt.

- *Gesamtenergie positiv:  $K < 0$*

Die Bewegung des Teilchens ist ungebunden und unendliche Entfernungen zum Ursprung sind möglich. Das Universum ist offen und expandiert mit der Grenzgeschwindigkeit

$$a'_{\mathbf{g}} = \sqrt{-\hat{K}} = c\sqrt{-K} \quad (7.235)$$

ins Unendliche.

Abgesehen von dieser leicht vorstellbaren Analogie ist die Gleichung (7.231) separabel und kann integriert werden:

$$a(t)' \sqrt{\frac{a(t)}{A_0 - \hat{K}a(t)}} = \pm 1 \quad (7.236)$$

$$\int_{a(t_0)}^{a(t)} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{A_0 - \hat{K}x}} = t - t_0, \quad (7.237)$$

Im letzten Schritt haben wir die Lösung mit positiven Zeiten gewählt. Das Integral in (7.237) ist mit Hilfe einiger Standardsubstitutionen lösbar:

$$I(a(t)) - I(a(t_0)) = t - t_0, \quad (7.238)$$

wobei die Funktion  $I(x)$  in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Krümmungsparameters  $\hat{K}$  drei unterschiedliche Formen annimmt:

$$I(x) = \begin{cases} \frac{A_0}{\sqrt{\hat{K}}^3} \left( \arcsin\left(\sqrt{\frac{\hat{K}}{A_0}} x\right) - \sqrt{\frac{\hat{K}}{A_0}} x \sqrt{1 - \frac{\hat{K}}{A_0} x} \right) & K > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 & K = 0 \\ \frac{A_0}{\sqrt{|\hat{K}|}^3} \left( -\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{|\hat{K}|}{A_0}} x\right) + \sqrt{\frac{|\hat{K}|}{A_0}} x \sqrt{1 + \frac{|\hat{K}|}{A_0} x} \right) & K < 0 \end{cases} \quad (7.239)$$

Mit Ausnahme des Falles  $K = 0$  sind diese Ausdrücke transzendent und lassen sich nicht analytisch umkehren. Während es sich für  $K \leq 0$  um eine monoton wachsende Funktion handelt ist das Verhalten für  $K > 0$  komplexer. In diesem Fall ist es möglich,  $I(x)$  in eine anschauliche geometrische Form zu überführen, indem wir zunächst einen Parameter  $q$  definieren

$$\frac{\hat{K}}{A_0} x =: \sin^2\left(\frac{1}{2} q\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(q)) \quad (7.240)$$

und diese Parametrisierung in  $I(x)$  einsetzen:

$$\frac{\sqrt{\hat{K}}^3}{A_0} (t - t_0) = \frac{1}{2}(q - \sin(q)). \quad (7.241)$$

Die Gleichung (7.241) gilt unter der Voraussetzung  $a(t_0) = 0$ , woraus  $I(a(t_0)) = 0$  folgt. Schließlich absorbieren wir noch die verbliebenen physikalischen Parameter in umskalierten Variablen  $\chi$  und  $\tau$  und erhalten

$$\chi(q) := 2 \frac{\hat{K}}{A_0} x = 1 - \cos(q) \quad (7.242)$$

$$\tau(q) := 2 \frac{\sqrt{\hat{K}^3}}{A_0} (t - t_0) = q - \sin(q). \quad (7.243)$$

Wenn der Parameter  $q$  die Werte  $0 \leq q \leq 2\pi$  durchläuft, beschreiben die Variablen  $\chi(q)$  und  $\tau(q)$  eine Zykloide. Mit Hilfe dieses geometrischen Bildes können einige interessante kosmologische Größen auf einfache Weise abgeleitet werden.

#### Die Entwicklung in den Big Crunch:

Startet ein Universum mit positiver Krümmung  $\hat{K} > 0$  zur Zeit  $t_0 = 0$  mit  $a(0) = 0$  in einem Big Bang, durchläuft es die Zykloide zunächst bis zum zum Punkt der größten Ausdehnung bei  $q = \pi$ :

$$\tau(\pi) = \pi \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = \frac{\pi}{2} \frac{A_0}{\sqrt{\hat{K}^3}} \quad (7.244)$$

$$\chi(\pi) = 2 \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = \frac{A_0}{\hat{K}}. \quad (7.245)$$

Der letzte Ausdruck (7.245) stimmt mit dem aus dem „Energiesatz“ hergeleiteten Wert (7.234) überein. Anschließend schrumpft die Längenskala wieder und das Universum verschwindet mit  $q = 2\pi$  in einem Big Crunch:

$$\tau(2\pi) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad t_{\text{cr}} = \pi \frac{A_0}{\sqrt{\hat{K}^3}} \quad (7.246)$$

Aufgrund der Anfangsbedingung  $a(0) = 0$  ist  $t_{\text{cr}}$  die für den Big Bang– Big Crunch– Zyklus benötigte Gesamtzeit des materiedominierten Universums.

#### Der Hubble– Parameter $H(t)$ :

Der für Messungen zugänglichere Hubble– Parameter  $H(t)$  hat Gleichung (7.236) zufolge die Gestalt

$$H(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{A_0 - \hat{K} a(t)}{a(t)^3}}, \quad (7.247)$$

in welche die durch die transzendenten Gleichungen (7.239) festgelegte Skalenfunktion  $a(t)$  einzusetzen ist. Im Fall des flachen Universums kann  $H(t)$  analytisch bestimmt werden, da die Skalenfunktion mit  $\hat{K} = 0$  und der Anfangsbedingung  $a(0) = 0$  des Big Bangs die Form

$$a(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{A_0} t \right)^{\frac{2}{3}} \quad (7.248)$$

annimmt. Setzt man dieses in (7.247) ein, lautet der Hubble-Parameter

$$H(t) = \frac{2}{3t}. \quad (7.249)$$

Das Standardmodell der Kosmologie besagt, daß nach der heftigen inflationären Phase kurz nach dem Big Bang die Annahme eines flachen Universums für die Gegenwart durchaus realistisch ist, weswegen Gleichung (7.249) das Universum im materiedominierten Zustand gut beschreiben sollte. Seit 1989 verdichten sich jedoch Anzeichen dafür, daß zur Zeit das Vakuum und dessen **Dunkle Energie** über Materie und Strahlung dominiert.

Die Energiedichte  $\rho(t)$ :

Mit der Kenntnis der Skalenfunktion  $a(t)$  kann die Energiedichte aus der ersten Friedmanngleichung (7.226) bestimmt werden:

$$\rho = \frac{3}{\hat{\kappa}} \left( \left( \frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{\hat{K}}{a^2} \right). \quad (7.250)$$

Das erste Integral (7.236) liefert einen Ausdruck für

$$\left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \frac{A_0}{a^3} - \frac{\hat{K}}{a^2}, \quad (7.251)$$

wodurch wir die Energiedichte berechnen können:

$$\rho(t) = \frac{3}{\hat{\kappa}} \frac{A_0}{a^3(t)}. \quad (7.252)$$

Da durch den Expansionsprozeß dem Universum keine Materie hinzugefügt oder entzogen wird, verändert sich die Energiedichte ausschließlich durch die triviale Abhängigkeit von der Längenskala

$$\rho \sim \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}}, \quad \sqrt{-|\mathbf{g}|} = c a^3(t) f^2(r) \sin^2(\vartheta), \quad (7.253)$$

was durch den Ausdruck (7.252) korrekt wiedergegeben wird.

Zusammenfassung:

Schließlich listen wir noch einmal die häufig in der Literatur angegebenen Merkmale des materiedominierten Universums auf:

$$a(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{A_0} t \right)^{\frac{2}{3}} \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (7.254)$$

$$\rho(t) = \frac{3}{\hat{\kappa}} \frac{A_0}{a^3(t)} \sim \frac{1}{a^3(t)}. \quad (7.255)$$

### 7.2.10 Das $\Lambda$ – dominierte Universum

Nachdem Einstein sich 1931 mit den Worten „meine größte Eselei“ vom statischen kosmologischen Modell distanziert hatte, wurde der Konstanten  $\Lambda$  jahrzehntelang keinerlei physikalische Bedeutung beigemessen. Erst als man 1989 Daten des Hubble–Teleskopes in Bezug auf Supernovaereignisse des Spektraltyps Ia analysierte und herausfand, daß das Universum gegenwärtig schwach exponentiell expandiert, versuchte man diese Expansion mit der erneuten Einführung der Kosmologischen Konstanten zu beschreiben. Diese wirkt wie Materie mit der eigenartigen Zustandsgleichung

$$\rho = -p = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}, \quad (7.256)$$

welche in jedem Punkt des Universums vorhanden ist und üblicherweise als Eigenschaft des Vakuums interpretiert wird. Bisher existieren nur Spekulationen, ob und wie diese Zustandsgleichung in der Natur realisiert ist und man spricht von **Dunkler Energie**, ohne deren physikalischen Charakter tatsächlich zu kennen. Wir werden das materiedominierte Modell des kosmischen Staubes

$$p = 0 \quad (7.257)$$

durch die Kosmologische Konstante  $\Lambda$  ergänzen, wobei die bisher verwendete Methode zur Lösung der Friedmanngleichungen auch weiterhin anwendbar ist. Die Berechnung des zu (7.239) analogen Integrals ist jedoch technisch aufwendig, weswegen wir uns auf das flache Universum mit  $\hat{K} = 0$  beschränken, das dem Standardmodell der Kosmologie zufolge ohnehin der physikalischen Realität entspricht. Die Friedmanngleichungen lauten unter diesen Bedingungen

$$3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 = \hat{\kappa} \rho + \hat{\Lambda} \quad (7.258)$$

$$3 \frac{a''}{a} = -\frac{1}{2} \hat{\kappa} \rho + \hat{\Lambda}, \quad (7.259)$$

wobei  $\hat{\Lambda}$  für die umskalierte Kosmologische Konstante

$$\hat{\Lambda} = c^2 \Lambda \quad (7.260)$$

steht. Ineinander eingesetzt ergeben beide Gleichungen

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a'}{a} \right) + 3 \left( \frac{a'}{a} \right)^2 - \hat{\Lambda} = 0. \quad (7.261)$$

Der Hubble-Parameter  $H(t)$ :

Gleichung (7.261) ist eine gewöhnliche separable Differentialgleichung erster Ordnung für den Hubble-Parameter  $H(t)$ :

$$2H' + 3H^2 - \hat{\Lambda} = 0 \quad (7.262)$$

$$\frac{H'}{H^2 - \frac{1}{3}\hat{\Lambda}} = -\frac{3}{2}. \quad (7.263)$$

Mit (7.263) haben wir die Lösung der Differentialgleichung auf die Berechnung eines elementaren Integrals zurückgeführt:

$$H(t) = \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{3}} \coth \left( \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} (t - t_0) \right). \quad (7.264)$$

Bei verschwindender Kosmologischer Konstante  $\hat{\Lambda} = 0$  wird die Form (7.249) des Hubble- Parameters für das materiedominierte flache Universum reproduziert. Im Limes kleiner und großer Zeiten erhalten wir mit  $t_0 = 0$  die folgenden Approximationen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} H(t) = \frac{2}{3t}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} t \ll 1 \quad (7.265)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{3}}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} t \gg 1. \quad (7.266)$$

An diesen beiden Grenzfällen läßt sich ablesen, wie der Hubble Parameter ausgehend von der schon bekannten Expansion des materiedominierten Universums schließlich eine exponentielle Expansion beschreibt, in welcher der Skalenparameter  $a(t)$  und seine zeitliche Ableitung  $a'(t)$  zueinander proportional sind.

Der Skalenparameter  $a(t)$ :

Die Gleichung (7.264) ist eine separable Differentialgleichung für die Funktion  $a(t)$ , die leicht integriert werden kann:

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \sqrt{\frac{\hat{\Lambda}}{3}} \coth\left(\frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} (t - t_0)\right) \quad (7.267)$$

$$\ln(a(t)) - \ln(a(t_0)) = \frac{2}{3} \ln\left(\sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} (t - t_0)\right)\right) \quad (7.268)$$

Damit diese Lösung bei verschwindendem  $\hat{\Lambda}$  mit dem Ergebnis des Skalenparameters (7.248) für das ungekrümmte materiedominierte Universum übereinstimmt, schreiben wir die Integrationskonstante

$$a(t_0) = \left(\sqrt{\frac{3A_0}{\hat{\Lambda}}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (7.269)$$

und erhalten:

$$a(t) = \left(\sqrt{\frac{3A_0}{\hat{\Lambda}}} \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} (t - t_0)\right)\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.270)$$

Die Grenzfälle für große und kleine Zeiten unter der Annahme  $t_0 = 0$  lauten hierbei

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = \left( \frac{3}{2} \sqrt{A_0 t} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} t \ll 1 \quad (7.271)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3A_0}{\hat{\Lambda}}} \right)^{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\Lambda}} t}, \quad \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} t \gg 1. \quad (7.272)$$

Wie schon beim Hubble-Parameter ist auch beim Skalenparameter ein Übergang von der algebraischen Expansion des materiebasierten Universums zu exponentieller Expansion zu beobachten.

Die Energiedichte  $\rho(t)$ :

Analog zur Diskussion der Energiedichte des materiedominierten Universums können wir  $\rho(t)$  durch die erste Friedmanngleichung bestimmen:

$$\rho = \frac{1}{\hat{\kappa}} \left( 3H^2 - \hat{\Lambda} \right). \quad (7.273)$$

Für die folgenden Rechnungen verwenden wir die Abkürzung

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{3\hat{\Lambda}} (t - t_0) \quad (7.274)$$

und können mit Hilfe von (7.264) schreiben:

$$3H^2 - \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda} \left( \coth^2(\tau) - 1 \right) = \hat{\Lambda} \frac{1}{\sinh^2(\tau)}. \quad (7.275)$$

Aus Gleichung (7.270) folgt

$$\sinh^2(\tau) = \frac{\hat{\Lambda}}{3A_0} a^3, \quad (7.276)$$

und wir erhalten für die Energiedichte  $\rho(t)$  denselben Ausdruck wie beim materiedominierten Universum ohne Kosmologische Konstante:

$$\rho(t) = \frac{3}{\hat{\kappa}} \frac{A_0}{a^3(t)}. \quad (7.277)$$

Der Grund hierfür ist die Verwendung derselben Zustandsgleichung der Materie, wodurch sich die Änderung der Energiedichte des expandierenden Universums auf die Abhängigkeit des Volumens von der Längenskala beschränkt:

$$\rho \sim \frac{1}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}}, \quad \sqrt{-|\mathbf{g}|} = c a^3(t) f^2(r) \sin^2(\vartheta). \quad (7.278)$$

Die Veränderung der Dynamik des Energieinhaltes durch die Einführung der Kosmologischen Konstanten beschränkt sich somit auf das unterschiedliche Zeitverhalten von  $a(t)$ .

Zusammenfassung:

Wie schon beim strahlungs- und materiedominierten Universum fassen wir auch für das  $\Lambda$ -dominierte Universum die wichtigsten Resultate in einer Übersicht zusammen:

$$a(t) \stackrel{t \rightarrow 0}{\approx} \left( \frac{3}{2} \sqrt{A_0} t \right)^{\frac{2}{3}} \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (7.279)$$

$$a(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\approx} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3A_0}{\hat{\Lambda}}} \right)^{\frac{2}{3}} e^{\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\Lambda}} t} \sim e^{\sqrt{\frac{1}{3}\hat{\Lambda}} t} \quad (7.280)$$

$$\rho(t) = \frac{3}{\hat{k}} \frac{A_0}{a^3(t)} \sim \frac{1}{a^3(t)}. \quad (7.281)$$

Nach einer frühen exponentiellen Inflationsphase und anschließenden Epochen der Strahlungs- und Materiedominanz ist der momentan bestimmende Faktor in der zeitlichen Entwicklung des Universums offenbar das Vakuum.

## Literaturverzeichnis

- [1] H.Schöneborn, *Tensorrechnung I*, RWTH Aachen, Vorlesungsskript (1982).
- [2] R.Graham, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Universität GH Essen, Vorlesungsskript, (1991).
- [3] R.Hübner, *Die Maxwell'schen Gleichungen und ihre relativistische Kovarianz*, private Aufzeichnungen, Wesel (2009).
- [4] S.M.Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, University of California, Santa Barbara, arXiv:gr-qc/9712019v1 (1997).
- [5] W.Pauli, *Relativitätstheorie*, B.G.Teubner, Leipzig– Berlin (1921).
- [6] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Band II: Klassische Feldtheorie*, Akademie - Verlag, Berlin (1989).
- [7] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman and Company, New York (1973).
- [8] A.Pais, *Raffiniert ist der Hergott...*, Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg, Berlin (2000).
- [9] K.Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 189 ff. (1916).
- [10] K.Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit*, Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, 424-434 (1916).
- [11] J.R.Oppenheimer, H.Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, Phys. Rev. **56**, 455-459 (1939).
- [12] G.D.Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Harvard University Press, Cambridge MA (1923).
- [13] S.W.Hawking, *Black hole explosions?*, Letters to Nature **248**, 30-31 (1974).
- [14] A.A.Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, Zeitschrift für Physik **10** Nr.1, 377-386 (1922).
- [15] G.E.Lemaître, *Un univers homogène de masse constante...*, Annales de la Société de Bruxelles, **A47**, 49-56 (1927).

- [16] E.P.Hubble, *A relation between distance and radial velocity between extra-galactic nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **15**(3), 168-173 (1929).
- [17] H.P.Robertson, *Kinematics and world structure*, Astrophysical Journal **82**, 284-301 (1935).
- [18] A.G.Walker, *On Milne's Theory of World-Structure*, Proceedings of the London Mathematical Society, **s2-42**, 90-127 (1937).
- [19] S.Perlmutter et al., *Measurement of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, Astrophysical Journal **517**, 565-586 (1999).
- [20] J.C.Baez, E.F.Bunn, *The Meaning of Einstein's Equation*, arXiv:gr-qc/0103044 (2006).
- [21] J.C.Baez (Oz vs. Wizzard), *The General Relativity Tutorial*, University of California, Riverside (2006).
- [22] E.F.Bunn (Ted Bunn), *Black Holes FAQ List*, University of California, Berkeley (1995).