Die Maxwellschen Gleichungen und ihre relativistische Kovarianz

Eine physikalisch motivierte Einführung
in die Theorie der Differentialformen

von

Dr. Ralph Hübner

Wesel, 25.10.2009

Vorwort

Die Entdeckung der elektromagnetischen Feldgleichungen von James Clerk Maxwell ist zum Zeitpunkt der Entstehung dieses Textes weit über hundert Jahre alt. In dieser Zeitspanne entwickelten sich verschiedene mathematische Darstellungsformen, die zu unterschiedlicher Popularität gelangt sind. Die Vektorschreibweise von Josiah Willard Gibbs und Oliver Heaviside stammt aus dem Ende des neunzehnten Jahrhunderts und ist nur unwesentlich jünger als die Maxwellsche Theorie selbst. Diese Formulierung bietet eine koordinatenfreie Darstellung im Ortsraum und ist für gewöhnlich die erste, mit der man beim Studium der Physik in Berührung kommt.

Albert Einsteins Veröffentlichung der Speziellen Relativitätstheorie im Jahr 1905 begründete ein neues Paradigma der Physik, demzufolge Raum und Zeit als ein einheitliches Kontinuum zu betrachten sind. Dieser Gedanke wurde wenige Jahre später von Hermann Minkowski durch die Einführung von Tensoren über dieser vierdimensionalen Raumzeit algebraisch umgesetzt. In Vierertensoren geschrieben bekommen die Maxwellschen Gleichungen eine kompaktere Gestalt, die jeder Physiker zumindest in Theorievorlesungen kennenlernt. Diese Form, in der die relativistische Kovarianz der Maxwellschen Theorie offensichtlich wird, ist inzwischen ebenfalls knapp hundert Jahre alt. Sie hat den Nachteil, daß sie nicht koordinatenfrei ist.

Seit der Entstehung der Maxwellschen Gleichungen gab es Ansätze, die im Elektromagnetismus betrachteten physikalischen Größen als Elemente spezieller Algebren aufzufassen, wie es schon mit den Objekten der räumlichen Geometrie geschehen war. Maxwell selbst bevorzugte die Darstellung in Quaternionen, wodurch Gleichungen entstehen, deren Komplexität und Unübersichtlichkeit sich nicht für die Übernahme in den allgemeinen physikalischen Sprachgebrauch eignete. Größeren Erfolg erzielte Élie Joseph Cartans Interpretation der elektromagnetischen Felder als Elemente einer Graßmann- Algebra, welche die Maxwellschen Gleichungen zu Gleichungen in Differentialformen werden läßt. Diese sind äußerst kompakt, koordinatenfrei und etwa seit den Fünfziger Jahren eine zeitgemäße Form dieser Theorie.

Erstaunlicherweise ist die Differentialformenschreibweise der Maxwellschen Gleichungen trotz ihrer offensichtlichen Vorteile keineswegs in der Physik allgemein verbreitet. Es ist vielmehr nicht einmal sichergestellt, daß ein Physiker sie während seines Studiums überhaupt kennenlernt. Ich selbst bin in den achtziger Jahren eher zufällig in einer mathematischen Nebenfachvorlesung darüber gestolpert. Differentialformen wurden dort auf axiomatische Weise „top–down“ eingeführt, ein Verfahren, das in der modernen Mathematik üblich ist, der Literatur über Differentialformen entspricht, und gegen das prinzipiell nichts einzuwenden ist. Da meine Kenntnisse wie auch die meiner Kommilitonen von der Gibbs– Heavisideschen bzw. der Minkowskischen Darstellung geprägt waren, hinterließ diese Veranstaltung einige Unklarheiten, wie das eine oder andere Detail mit dem schon Bekannten zu vereinbaren sei. Hier wäre ein besseres Verständnis von „bottom–up“ Methoden wünschenswert gewesen, in denen neue Begriffe auf der Grundlage bereits bekannter Tatsachen aufgebaut werden.

Der vorliegende Text wendet sich hauptsächlich an Physiker, die das Grundstudium absolviert haben sowie an jeden, den die Maxwellsche Elektrodynamik interessiert. Er soll dabei behilflich sein, die oben skizzierten Verständnislücken zwischen den herkömmlichen Formen der Elektrodynamik und der Differentialformenschreibweise zu minimieren oder im Idealfall ganz zu vermeiden. Ein gut fundiertes Verständnis von Differentialformen ist auch bei der Diskussion der Feltheorien anderer Wechselwirkungen unumgänglich, in besonderem Maße gilt dies für die Allgemeine Relativitätstheorie. Zu guter Letzt bietet schon die Beschäftigung mit Differentialformen an sich einen ästhetischen Reiz, den weiterzuvermitteln ebenfalls ein Anliegen dieses Textes ist.

Wesel, Frühjar 2006 Dr. Ralph Hübner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Aus der antiken Geschichtsschreibung ist überliefert, daß bereits die Menschen des Altertums Kenntnis von Phänomenen hatten, die wir heutzutage als Auswirkungen elektromagnetischer Kräfte verstehen. In gängigen Lehbüchern zur Elektrodynamik [Ja83], [Gre82] werden Bernstein und und Magnetit mit ihren elektrostatischen bzw. magnetostatischen Effekten, Gewitter, Wetterleuchten oder die Stromschläge von Zitterfischen als Beispiele für solche Phänomene aufgeführt. Eine frühe phänomenologische Studie der Neuzeit über Magnete stammt von William Gilbert [Gil00], in der unter anderem beschrieben wird, daß sich einzelne Magnetpole nicht isolieren lassen. Im achtzehnten und neunzehnten Jahrundert folgten quantitative Arbeiten zu Elektrizität und Magnetismus, woraus sich schließlich eine geschlossene mathematische Beschreibung ableiten ließ. Herausragende Resultate dieser Zeit sind Coulombs Messungen des elektrostatischen Kraftgetzes mit einer Drehwaage, Ampères Untersuchungen der Wirkung stromdurchflossener Leiter sowohl aufeinander als auch auf Magnete und in besonderem Maße natürlich Faradays Arbeiten über die Induktion und die damit einhergehende Einführung des Feldbegriffes.

James Clark Maxwell faßte 1865 diese empirischen Resultate in einem System gekoppelter Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Feldgrößen zusammen [Ma65]. In der Vektorschreibweise von Josiah Willard Gibbs [Gib93] und Oliver Heaviside [Hv93] bilden sie die Grundlage für diesen Text:

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi\rho \tag{1.1.1}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \tag{1.1.3}$$

$$\operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}\,. \tag{1.1.4}$$

Die Variablen $\underline{E}$ und $\underline{B}$ sind das elektrische bzw. magnetische Feld, und die auf den rechten Seiten auftretenden Inhomogenitäten ρ und $\underline{j}$ repräsentieren die elektrische Ladungs– bzw. Stromdichte, die somit als Quellen dieser Felder aufzufassen sind. Alle Größen sind als Funktionen von Ort und Zeit zu verstehen. Die einzelnen Gleichungen beschreiben in konzentrierter Form die Gesetze der Elektrizitätslehre und des Magnetismus, die sich aus den oben erwähnten empirischen Arbeiten herauskristallisiert hatten:

– *Gleichung (1.1.1):*
  Das Coulombsche Gesetz in Form einer Feldgleichung für $\underline{E}$.

– *Gleichung (1.1.2):*
  Das Faradaysche Induktionsgesetz.

– *Gleichung (1.1.3):*
  Magnetische Monopole existieren nicht, Magnete besitzen immer Dipolcharakter.

– *Gleichung (1.1.4):*
  Ampèresches Verkettungsgesetz zwischen Magnetfeld und elektrischem Strom in Verbindung mit dem Maxwellschen Verschiebungsstrom.

1.1 Kovarianz der Maxwellschen Gleichungen

Einsteins Veröffentlichung der Relativitätstheorie [Ei05] um 1905 führte zu einer Revision der Rolle von Raum und Zeit in der Physik. Beide Begriffe verloren ihre eigenständige Bedeutung und wurden im sog. „Raum– Zeitkontinuum“ zusammengefaßt [Mi09]. Diese Maßnahme bettete die Newtonsche Bewegungslehre in eine neue relativistische Mechanik ein, in welcher sie den Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit c beschrieb. Keine Veränderungen durch die Relativitätstheorie erfuhr hingegen die Elektrodynamik, da diese die Invarianz gegenüber Lorentztransformationen bereits implizit enthält. Das ist kaum verwunderlich, wenn man bedenkt, daß die Wellenlösungen der Maxwellschen Gleichungen ein ultrarelativistisches Objekt beschreiben, nämlich das Licht selbst.

Der Anlaß zu der vorliegenden Studie ist die Form (1.1) der Maxwellschen Gleichungen, die keine relativistische Kovarianz erkennen läßt. Dem Einsteinschen Relativitätsprinzip folgend wäre eine kovariante Darstellung durch folgende Merkmale charakterisiert:

– Die Gleichungen enthalten die Ortskoordinaten x^i und die Zeit t in einer Form, die keine dieser Variablen auszeichnet.

– Alle physikalischen Größen sind durch Tensoren über dem vierdimensionalen Raum– Zeitkontinuum darstellbar.

Die mathematische Umsetzung des Relativitätsprinzipes geschieht mit Hilfe der zweiten Forderung, durch die der Wechsel in ein anderes Inertialsystem zu einem einfachen Basiswechsel reduziert wird.

In den Gleichungen (1.1) gehen zwar alle Ortskoordinaten symmetrisch ein, die Zeit jedoch tritt in separaten Termen auf und läßt sich in keiner offensichtlichen Weise in die Operatoren div und rot integrieren. Ebensowenig scheinen sich auf den ersten Blick $\underline{E}$ und $\underline{B}$ als Elemente von Vierertensoren interpretieren zu lassen, allenfalls die Inhomogenitäten der Gleichungen (1.1.1) und (1.1.4) deuten auf eine mögliche Zusammenfassung von Ladungsdichte ρ und Stromdichte $\underline{j}$ in einem vierdimensionalen Vektor hin.

1.2 Konzept der Studie

Einen ersten Einblick in die Eigenschaften der elektromagnetischen Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ gewinnen wir in Kapitel 2 durch Untersuchung ihrer Potentiale $\underline{A}$ und Φ. Wir folgen damit dem in der theoretischen Physik üblichen Verfahren zur Herleitung der elektromagnetischen Wellengleichung [Ja83], [LL89]. Vervollständigt wird diese elementare Analyse durch die Diskussion des Haushaltes von Feldenergie und –impuls.

In Kapitel 3 werden die Resultate aus Kapitel 2 in die Viererkomponentenschreibweise der relativistischen Physik übertragen. Zu diesem Zweck konstruieren wir für alle elektromagnetischen Größen Tensoren im Minkowskiraum, deren Invarianzeigenschaften die oben gestellten Forderungen erfüllen. Eine vollständig kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen wird hiermit jedoch nicht erreicht, denn die Differentialoperatoren, die auf diese Tensoren wirken, bestehen aus den in Komponentenschreibweise zerfallenen Fragmenten von Gradient, Divergenz und Rotation ergänzt durch die Ableitung nach der Zeit. Die Themenliste aus Kapitel 2 vervollständigen und ergänzen wir durch die Diskussion der Lagrangedichte in der Rolle als Erzeugende der Maxwellschen Gleichungen und durch die Betrachtung des Energie– Impulstensors.

Für eine komponentenfreie Darstellung fehlt uns bisher eine vierdimensionale Erweiterung der in drei Dimensionen bekannten Differentialoperatoren grad, div und rot. Die der Differentialgeometrie entlehnte Theorie der Cartanschen Differentialformen [Ca46] leistet eine solche Verallgemeinerung für beliebige Dimensionen. Sie basiert auf der sich in Kapitel 3 ergebenden Schiefsymmetrie des Feldstärketensors und produziert Gleichungen in Termen, die sich direkt als Integranden für Gebietsintegrale verwenden lassen [Fl63], [MTW73]. In Kapitel 4 skizzieren wir diese Theorie, soweit sie für unsere Zwecke relevant ist.

Die in Kapitel 5 vorgestellte Differentialformenschreibweise ist den Maxwellschen Gleichungen (1.1) derart angemessen, daß diese auf zwei Gleichungen in vier Symbolen reduziert werden. Auch die Wellengleichung bekommt eine recht kompakte Form, und die Erzeugung der Feldgleichungen aus den Euler– Lagrange– Gleichungen kann auf ein koordinatenfreies Verfahren umgestellt werden. Für die Beschreibung des Energie– Impulstensors hingegen erweisen sich Differentialformen als eher ungeeignet aus Gründen, die wir in Abschnitt 5.6 vorstellen.

Kapitel 6 rundet diese Studie ab mit einigen Details aus der Geschichte der Elektrodynamik seit Maxwell. Dabei werden die hier erörterten drei Formulierungen (elementar, kovariant und mit Differentialformen) in einen historischen Kontext gestellt.

Wie diesem Programm zu entnehmen ist, bietet dieser Text nichts wirklich neues, alle hier vorgestellten Resultate gehören zum Standardrepertoire der Grundlagenphysik, der Relativitätstheorie oder der klassischen Feldtheorie. Die Besonderheit ist vielmehr die hier gewählte Zusammenstellung der einzelnen Elemente, die Motivation der vorgeführten Rechnungen oder die Schwerpunkte der Beweisführung. Das Ziel ist eine zusammenfassende Darstellung der Grundgleichungen der Elektrodynamik, die während der Hochschulausbildung in drei verschieden Varianten gelehrt werden. Zwei dieser Varianten, die elementare und die Viererdarstellung, lernt jeder Student der Physik oder der Ingenieurswissenschaften kennen. Mit der Theorie der Differentialformen jedoch kommt man gewöhnlicherweise nur in Spezialvorlesungen in Berührung. Der vorliegende Text sollte für Physikstudenten nach Beendigung des Grundstudiums nachvollziehbar sein und als Hilfe dienen, die Kenntnisse über die Struktur der Maxwellschen Gleichungen abzurunden.

1.3 Konventionen

Um den Fluß der Argumentation nicht zu unterbrechen, verlagern wir die Rekapitulation von elementaren mathematischen Grundlagen sowie die Vorführung längerer Umformungen und Berechnungen in Anhänge, auf die bei Bedarf im laufenden Text verwiesen wird. Weiterhin verwenden wir folgende Notation:

a	....	Zahlenwerte
A^i, A^{ij}	....	Tensorkomponenten allgemein
A^μ, $A^{\mu\nu}$	....	Tensorkomponenten (4-er)
$\underline{A}$, $\underline{\underline{A}}$, $\boldsymbol{A}$	....	Vektoren und Tensoren allgemein
A	....	Vektoren und Tensoren (4-er)
$\boldsymbol{\alpha}$	....	Differentialformen

Wenn für eine Größe ein Symbol üblich ist, das nicht dem obenstehenden Schema entspricht, bleiben wir bei der traditionellen Bezeichnung. Ansonsten gelten die folgenden in der Physik und Mathematik üblichen Vereinbarungen:

- Lateinische Indizes stehen an Komponenten von Tensoren im Ortsraum und laufen über die Werte 1, 2, 3. Alternativ werden auch die Komponenten allgemeiner (nicht 4-er) Tensoren mit lateinischen Indizes versehen.
- Griechische Indizes numerieren Komponenten von Vierertensoren und laufen über die Werte 0, 1, 2, 3.
- Kontra- und kovariante Komponenten unterscheiden sich durch Hoch- bzw. Tiefstellung der Indizes, siehe auch Anhang A.2.
- Über paarweise hoch- und tiefgestellt auftretende Indizes wird implizit summiert (Einsteinsche Summationskonvention).

2 Elementare Darstellung

Wir beginnen unsere Analyse der Maxwellgleichungen, indem wir diese als Basis aller weiteren Rechnungen noch einmal notieren:

$$\operatorname{div} \underline{E} = 4\pi\rho \tag{2.1.1}$$

$$\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0 \tag{2.1.2}$$

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \tag{2.1.3}$$

$$\operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} \tag{2.1.4}$$

2.1 Einführung der Potentiale

Vom Standpunkt der Vektoranalysis aus betrachtet ist Gleichung (2.1.3) eine Integrabilitätsbedingung, durch die sich das Magnetfeld $\underline{B}$ gemäß (A.1.2) über ein Vektorpotential $\underline{A} = \underline{A}(\underline{x}, t)$ darstellen läßt:

$$\underline{B}(\underline{x}, t) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{x}, t)\,. \tag{2.2}$$

Setzt man Gleichung (2.2) in die Maxwellgleichung (2.1.2) ein, ergibt sich

$$\operatorname{rot}\left[\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}\right] = 0\,. \tag{2.3}$$

Dieses ist eine weitere Integrabilitätsbedingung für den Inhalt der eckigen Klammer, der aufgrund der Beziehung (A.1.1) als Gradient eines skalaren Potentials $\Phi = \Phi(\underline{x}, t)$ geschrieben werden kann:

$$\underline{E}(\underline{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{x}, t) = -\operatorname{grad} \Phi(\underline{x}, t)\,. \tag{2.4}$$

Mit Hilfe der beiden inhomogenen Maxwellgleichungen (2.1.1) und (2.1.4) erhalten wir Bewegungsgleichungen für diese neu eingeführten Potentiale $\Phi(\underline{x},t)$ und $\underline{A}(\underline{x},t)$. Zunächst werden die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ über die Beziehungen (2.2) und (2.4) durch die Potentiale ersetzt. Der in Gleichung (2.1.4) entstehende Ausdruck rot rot wird unter Anwendung der Regel (A.1.3) umgeformt, während in Gleichung (2.1.1) der Laplaceoperator Δ durch (A.1.4) ins Spiel kommt. Damit ergibt sich

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\underline{A} \tag{2.5.1}$$

$$\Delta\underline{A} = -\frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} + \operatorname{grad}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \operatorname{div}\underline{A}\right]. \tag{2.5.2}$$

Dieses System partieller Differentialgleichungen ist für eine gegebene Ladungs- und Stromdichteverteilung als Anfangs/Randwertproblem zu lösen.

2.2 Die Lorentzeichung

Auf den ersten Blick scheint uns das Gleichungssystem (2.5) dem Ziel, eine kovariante Schreibweise der Maxwellgleichungen zu finden, nicht näherzubringen. Verglichen mit der Ausgangsform (2.1) wird die Halbierung der Anzahl der Gleichungen (vier statt acht) durch den Übergang zu einem Gleichungssystem zweiter Ordnung erkauft. Dieses ist weiterhin auf unübersichtliche Art gekoppelt und enthält keine der in Abschnitt 1.1 angegebenen Merkmale einer Lorentz- kovarianten Darstellung.

Man muß jedoch bedenken, daß das Umschreiben der Felder in Potentiale einige zusätzliche Freiheitsgrade mit sich bringt, welche die Feldstärken $\underline{E}$ und $\underline{B}$ selbst nicht beeinflussen. Damit sind diese Freiheitsgrade ohne physikalische Bedeutung und werden, Integrationskonstanten vergleichbar, durch geeignete Zusatzforderungen festgelegt. Da diese aber nicht durch die Felder vorgegeben sind, ist es möglich, mit ihrer Hilfe die Form der Gleichungen zu vereinfachen. Dieser Prozeß trägt den Namen „Eichung“ [Ja83], [LL89].

Daß das Vektorpotential durch die Integrabilitätsbedingung (2.2) nicht eindeutig definiert ist, folgt aus dem Verschwinden der Rotation eines Gradientenfeldes (A.1.1). Hierdurch existieren zu jedem Vektorpotential $\underline{A}$ weitere Versionen $\underline{A}'$ mit

$$\underline{A}'(\underline{x},t) = \underline{A}(\underline{x},t) + \operatorname{grad} f(\underline{x},t)\,, \tag{2.6}$$

die das gleiche Magnetfeld $\underline{B}$ beschreiben. Gleichung (2.4) besagt, daß mit dem Vektorpotential auch das skalare Potential gemäß

$$\Phi'(\underline{x},t) = \Phi(\underline{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}f(\underline{x},t) \tag{2.7}$$

transformiert werden muß. Insgesamt enthalten somit die Potentiale $\underline{A}(\underline{x}, t)$ und $\Phi(\underline{x}, t)$ eine willkürliche Funktion $f(\underline{x}, t)$, die erst durch das Aufstellen einer zusätzlichen Differentialgleichung festgelegt wird. Als für unsere Zwecke besonders geeignet erweist sich die Lorentzeichung

$$\operatorname{div} \underline{A}(\underline{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\underline{x}, t) = 0\,. \tag{2.8}$$

In Anhang B wird diskutiert, inwieweit sich ein beliebiges vorgegebenes Potentialpaar $\underline{A}(\underline{x}, t)$ und $\Phi(\underline{x}, t)$ durch eine solche Eichtransformation in eine der Lorentzeichung (2.8) gemäße Form überführen läßt. Aufgrund dieser Eichbedingung verschwindet in Gleichung (2.5.2) der Term innerhalb der eckigen Klammer, und der Divergenzterm aus Gleichung (2.5.1) kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \underline{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Phi\,. \tag{2.9}$$

Auf diese Weise werden die vier Gleichungen (2.5) vollständig entkoppelt und erhalten die Form von Wellengleichungen für die Potentiale $\Phi(\underline{x}, t)$ und $\underline{A}(\underline{x}, t)$ mit der Ladungsdichte $\rho(\underline{x}, t)$ und der Stromdichte $\underline{j}(\underline{x}, t)$ als Quelle:

$$\left[\partial^2/\partial(ct)^2 - \Delta\right]\Phi = 4\pi\rho \tag{2.10.1}$$

$$\left[\partial^2/\partial(ct)^2 - \Delta\right]\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}\,. \tag{2.10.2}$$

Diese Gleichungen müssen unter Beachtung vorgegebener Anfangs– und Randbedingungen an die Potentiale $\Phi(\underline{x}, t)$ und $\underline{A}(\underline{x}, t)$ gelöst werden. Wenn Felder und Potentiale im Unendlichen verschwinden, läßt sich durch Berechnung der Greensfunktion folgende Lösung konstruieren [Ja83]:

$$\Phi(\underline{x}, t) = c\int \frac{\rho(\underline{x}', t - \frac{1}{c}|\underline{x} - \underline{x}'|)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}\,d^3x' \tag{2.11.1}$$

$$\underline{A}(\underline{x}, t) = \int \frac{\underline{j}(\underline{x}', t - \frac{1}{c}|\underline{x} - \underline{x}'|)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}\,d^3x'\,. \tag{2.11.2}$$

Man sieht, daß die Potentiale (2.11) sich aus Punktladungs- bzw. Punktstromdichteanteilen zusammensetzen, deren Wirkungen jeweils um die Lichtgeschwindigkeit c retardiert im Punkt $\underline{x}$ eintreffen. Die Anpassung an beliebige Randbedingungen geschieht durch Addition von Lösungen der homogenen Variante der Wellengleichungen (2.10), in welcher Ladungs– und Stromdichte verschwinden:

$$\Phi_{\mathrm{H}}(\underline{x}, t) = \Phi_0(\omega, \underline{n})\, e^{i\frac{\omega}{c}(\underline{n}\cdot\underline{x}-ct)} \tag{2.12.1}$$

$$\underline{A}_{\mathrm{H}}(\underline{x}, t) = \underline{A}_0(\omega, \underline{n})\, e^{i\frac{\omega}{c}(\underline{n}\cdot\underline{x}-ct)}\,. \tag{2.12.2}$$

Die Ausdrücke (2.12) sind ebene Wellen der Frequenz ω, die sich in Richtung des Normalenvektors $\underline{n}$ mit der Geschwindigkeit c ausbreiten ($\underline{n}^2 = 1$) und somit die Dynamik des Lichtes selbst beschreiben.

2.3 Die Kontinuitätsgleichung

Aus den Maxwellschen Gleichungen (2.1) läßt sich eine Aussage über die Erhaltung der elektrischen Ladung gewinnen, aus der hervorgeht, daß durch den Einfluß des elektromagnetischen Feldes Ladung nur räumlich umverteilt wird und nicht verlorengeht. Hierfür setzen wir die zeitliche Ableitung von Gleichung (2.1.1) mit der Divergenz von Gleichung (2.1.4) in Beziehung und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\underline{E}(\underline{x}, t) = 4\pi\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}, t) = -4\pi\,\mathrm{div}\,\underline{j}(\underline{x}, t)\,. \tag{2.13}$$

Der aus der Gleichung (2.1.4) zusätzlich entstehende Term $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\underline{B}$ verschwindet, siehe Anhang A.1. Durch Umstellung der Terme ergibt sich aus Gleichung (2.13) eine Bilanzgleichung für die Ladungsdichte:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}, t) + \mathrm{div}\,\underline{j}(\underline{x}, t) = 0\,. \tag{2.14}$$

Diese „Kontinuitätsgleichung“ stellt sicher, daß die Zu- und Abnahme der Ladungsdichte $\rho(\underline{x}, t)$ im Raumpunkt $\underline{x}$ allein durch zu- und abfließende elektrische Ströme $\underline{j}(\underline{x}, t)$ erfolgt, und daß die elektrische Ladung in Summe erhalten bleibt.

2.4 Energie- und Impulsbilanz der Felder

Ein besonderer Aspekt jeder Feldtheorie ist die Darstellung von Energie und Impuls als Methode, den Einfluß der Felder auf Materie und andere externe Prozesse zu diskutieren. Im Falle des elektromagnetischen Feldes lassen sich Bilanzgleichungen für Energie– und Impulsdichte auf Basis der Maxwellschen Gleichungen formulieren. Für die Bilanzgleichung der Energie rekapitulieren wir ein in [LL89] angegebenes Verfahren:

Man multipliziert Gleichung (2.1.2) mit $\underline{B}$ sowie Gleichung (2.1.4) mit $\underline{E}$ und bildet die Differenz beider Ausdrücke:

$$(\,\underline{B}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{E}\,) - (\,\underline{E}\cdot\mathrm{rot}\,\underline{B}\,) + \frac{1}{c}\left[(\,\underline{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}\,) + (\,\underline{B}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\,)\right] = \frac{4\pi}{c}(\,\underline{j}\cdot\underline{E}\,)\,. \tag{2.15}$$

Die ersten beiden Summanden lassen sich mit Hilfe von (A.1.5) zu einem Divergenzausdruck umformen und aus den Termen in den eckigen Klammern kann die Ableitung nach der Zeit herausgezogen werden:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left[E^2 + B^2\right] + \mathrm{div}\,[\,\underline{E}\times\underline{B}\,] = \frac{4\pi}{c}(\,\underline{j}\cdot\underline{E}\,)\,. \tag{2.16}$$

Schließlich dividieren wir dieses Resultat durch den Faktor $4\pi/c$ und erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t}w + \mathrm{div}\,\underline{S} = (\,\underline{j}\cdot\underline{E}\,) \tag{2.17.1}$$

$$w = \frac{1}{8\pi}\left[E^2 + B^2\right] \tag{2.17.2}$$

$$\underline{S} = \frac{c}{4\pi}\,\underline{E}\times\underline{B}\,. \tag{2.17.3}$$

Daß es sich um die Bilanzgleichung einer Energiedichte handelt, erkennt man an der rechten Seite von (2.17.1), welche sich leicht als Leistungsdichte der von den Ladungsträgern gegen das elektrische Feld geleisteten Arbeit identifizieren läßt. Damit ist die physikalische Bedeutung der Ausdrücke auf der linken Seite festgelegt: w ist die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes und $\underline{S}$ deren Stromdichte. Die einzelnen Terme besagen, daß der Feldenergieinhalt w eines Raumelementes durch zwei Prozesse verändert wird:

– *Linke Seite, Term 1:*
  Gesamte zeitliche Änderung des Feldenergieinhaltes in einem Raumpunkt.

– *Linke Seite, Term 2:*

Einige Teile der Feldenergie wandern vom betrachteten Gebiet in andere Raumbereiche ab und erzeugen eine Energiestromdichte $\underline{S}$. Die Divergenz addiert die Anteile in Bezug auf verschiedene Raumrichtungen. Die Energie bleibt weiterhin Energie des elektromagnetischen Feldes, sie wird nur räumlich umverteilt. Diese Energiestromdichte $\underline{S}$ trägt den Namen „Poyntingvektor".

– *Rechte Seite, Term 1:*

Andere Teile der Feldenergie gewinnt bzw. verliert das Feld im Austausch mit mechanischer Energie. Da die durch das Magnetfeld $\underline{B}$ hervorgerufenen Kräfte auf der Bewegungsrichtung der geladenen Teilchen senkrecht stehen (siehe (2.21)), gibt nur die entlang des elektrischen Feldes $\underline{E}$ verlaufende Bewegung von Ladungsträgern einen Beitrag zum Quellterm.

Aus der Energiestromdichte $\underline{S}$ läßt sich auch die Impulsdichte $\underline{P}$ des elektromagnetischen Feldes gewinnen gemäß der Definition

$$\underline{P} := \frac{1}{c^2}\,\underline{S} = \frac{1}{4\pi c}\,\underline{E} \times \underline{B}\,. \tag{2.18}$$

Hierfür stellen wir ebenfalls eine Bilanzgleichung auf, indem wir die zeitliche Ableitung von $\underline{P}$ bilden und die Maxwellschen Gleichungen zur Umformung heranziehen. Da es sich um einfache Manipulationen aus der Vektoranalysis handelt, sind die Details dieser Rechnung in den Anhang C ausgegliedert. Es stellt sich heraus, daß sich die Stromdichten der Impulskomponenten in einem symmetrischen Tensor $\boldsymbol{T}$ zusammenfassen lassen (C.10), der in Analogie zur Bezeichnung von Impulsstromdichten in der Kontinuumsmechanik als Spannungstensor bezeichnet wird. Die im Anhang C vorgestellte Rechnung liefert

$$\boldsymbol{T} = -\frac{1}{4\pi}\left[\underline{E} \otimes \underline{E} + \underline{B} \otimes \underline{B} - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\mathbb{1}\right]. \tag{2.19}$$

Da es sich um die Impulsstromdichten des elektromagnetischen Feldes handelt, trägt $\boldsymbol{T}$ den Namen „Maxwellscher Spannungstensor". Das Symbol $\otimes$ steht für das tensorielle Produkt zweier Vektoren. In der Bilanzgleichung für die i-te Impulskomponente wirkt die Divergenz auf die i-te Zeile $\boldsymbol{T}^{(i)}$ dieses Tensors, vgl. (C.11):

$$\frac{\partial}{\partial t}P^i + \operatorname{div}\boldsymbol{T}^{(i)} = -\left[\rho\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}\right]^i. \tag{2.20}$$

Der Quellterm auf der rechten Seite beschreibt den Impulsfluß aus dem elektromagnetischen Feld in die Ladungsträger hinein und hat die Form der Lorentzkraftdichte

$$\underline{f} = \rho\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}\,. \tag{2.21}$$

Damit wird auch für die Impulsbilanz die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme durch den leicht identifizierbaren Quellterm offensichtlich. Die Aufstellung der Bilanz aus der Perspektive des elektromagnetischen Feldes erklärt das Vorzeichen des Quellterms in (2.20), denn der Impulszuwachs, den die Ladungsträger durch die Wirkung der Lorentzkraft erhalten, wird dem Feld entzogen. Somit können wir die Bilanzgleichung des Feldimpulses folgendermaßen zusammenfassen:

$$\frac{\partial}{\partial t} P^i + \operatorname{div} \boldsymbol{T}^{(i)} = -f^i \tag{2.22.1}$$

$$\boldsymbol{T} = -\frac{1}{4\pi}\left[\underline{E} \otimes \underline{E} + \underline{B} \otimes \underline{B} - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\mathbb{1}\right] \tag{2.22.2}$$

$$\underline{f} = \rho \underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}\,. \tag{2.22.3}$$

3 Kovariante Darstellung

Eine Gleichbehandlung von Raum und Zeit ist bei den meisten der im vorigen Kapitel hergeleiteten Gesetze nicht festzustellen. Ausnahmen sind die Kontinuitätsgleichung und die Wellengleichung, in denen die Symmetrie zwischen Raum– und Zeitkoordinaten so weit ausgeprägt ist, daß verbleibende Vorzeichenunterschiede in einer Metrik wie (3.1) absorbierbar sind. Der Relativitätstheorie und dem Forderungskatalog aus Abschnitt 1.1 zufolge ist es jedoch unumgänglich, daß die Gleichartigkeit von Raum und Zeit in der Form jedes physikalischen Gesetzes zum Ausdruck kommt. Von Hermann Minkowski stammt der Gedanke, die Größen der Mechanik und Elektrodynamik in ein vierdimensionales Raum– Zeitkontinuum einzubetten. Die mathematische Umsetzung dieses Kontinuums ist ein Vektorraum mit der speziellen Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{3.1}$$

Eine elementare Einführung in die Eigenschaften des Minkowskiraumes mit Schwerpunkt auf der Transformation von kontra– und kovarianten Komponenten bei einem Baiswechsel findet sich in Anhang A.2. Physikalische Größen, die als Tensoren über diesem Grundvektorraum aufgefaßt werden können, sind automatisch kovariant gegenüber solchen Basiswechseln und heißen aufgrund der Dimension des Raum- Zeitkontinuums „Vierertensoren“. Wir werden in diesem Kapitel alle Feldgrößen durch Vierertensoren repräsentieren und so deren Unabhängigkeit von der zugrundeliegenden Basis zum Ausdruck bringen. Spezielle Basiswechsel, welche die obenstehende Metrik unverändert lassen, sind Drehungen im dreidimensionalen Raum vergleichbar und heißen Lorentztransformationen. Für den Physiker bedeutet die Invarianz eines Gesetzes unter Lorentztransformationen dessen Unabhängigkeit vom verwendeten Inertialsystem.

Ein anschauliches Beispiel für einen Vierervektor ist der „Weltvektor“, in dem Ort und Zeit eines Ereignisses zu einem 4–Tupel zusammengefaßt sind:

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \tag{3.2}$$

Wie in (3.2) zu sehen, bekommt die Zeit mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit Längendimension und bildet die Komponente $x^0 = ct$. Auch an Differentialoperatoren lassen sich naheliegende vierdimensionale Erweiterungen vornehmen wie im Falle des Gradienten

$$(\partial/\partial x^\mu) = \begin{pmatrix} \partial/\partial\,(ct) \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

dessen Koeffizienten das Transformationsverhalten kovarianter Vektorkomponenten besitzen. Ähnlich offensichtlich ist die Konstruktion der Viererdivergenz eines Vektorfeldes $\boldsymbol{V}$ mit dem Transformationsverhalten eines Skalars:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\mu = \frac{\partial V^0}{\partial\,(ct)} + \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3}\,. \tag{3.4}$$

Die Einbettung der Rotation in eine vierdimensionale Vektoranalysis ist allerdings nicht so sinnfällig, da diese die Einführung einer speziellen Algebra erfordert. Wir werden diese Algebra später im Rahmen der Diskussion der Cartanschen Differentialformen behandeln.

3.1 Die Viererstromdichte

Bei genauerer Betrachtung der Kontinuitätsgleichung (2.14) wird die Existenz eines weiteren Vierervektors offensichtlich:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{x},t) = 0 \tag{3.5.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\, c\rho(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x^1} j^1(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x^2} j^2(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial x^3} j^3(\boldsymbol{x}) = 0\,. \tag{3.5.2}$$

Die Form (3.5.2) entsteht durch die Interpretation der Zeit als x^0- Komponente und hat die Form einer Viererdivergenz, die als Resultat den Skalar 0 ergibt. Daraus folgt, daß das Objekt, auf das diese Divergenz wirkt, selbst ein Vierervektor ist, nämlich die Erweiterung der Stromdichte zur Viererstromdichte $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} c\rho \\ j^1 \\ j^2 \\ j^3 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Durch Einführung der Viererstromdichte erhält die Kontinuitätsgleichung die kovariante Form

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu(x) = 0\,. \tag{3.7}$$

3.2 Das Viererpotential

Die Potentiale Φ und $\underline{A}$ können ebenfalls zu einem Vierervektor zusammengefaßt werden, wenn sie die Lorentzeichung (2.8) erfüllen, denn auch diese besitzt die Gestalt einer Viererdivergenz:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\underline{x}, t) + \operatorname{div}\underline{A}(\underline{x}, t) = 0 \tag{3.8.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Phi(x) + \frac{\partial}{\partial x^1}A^1(x) + \frac{\partial}{\partial x^2}A^2(x) + \frac{\partial}{\partial x^3}A^3(x) = 0\,. \tag{3.8.2}$$

Die rechte Seite von Gleichung (3.8.2) ergibt den Skalar 0, und somit läßt sich erneut schließen, daß der Operand unter der Viererdivergenz ein Vierervektor ist:

$$A = \begin{pmatrix} \Phi \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Auf diese Weise erhält die Lorentzeichung die kompakte kovariante Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu(x) = 0\,. \tag{3.10}$$

3.3 Die Wellengleichung

In Abschnitt 2.2 haben wir gezeigt, daß durch die Lorentzeichung die Bewegungsgleichungen der Potentiale entkoppeln und in Wellengleichungen (2.10) für die einzelnen Potentialkomponenten zerfallen:

$$\left[\partial^2/\partial(ct)^2 - \Delta\right]\Phi = 4\pi\rho \tag{3.11.1}$$

$$\left[\partial^2/\partial(ct)^2 - \Delta\right]\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}\,. \tag{3.11.2}$$

Der Differentialoperator in den eckigen Klammern trägt den Namen „D'Alembertoperator" und kann in die Vektoralgebra des Minkowskiraumes eingebettet werden, indem er als Quadrat des Vierergradienten interpretiert wird. Analog zum Laplaceoperator Δ bezeichnen wir diesen Operator mit dem Symbol $\Box$:

$$\Box = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\,. \tag{3.12}$$

Der $\Box$- Operator verhält sich unter Lorentztransofrmationen wie ein Skalar. In den letzten Abschnitten haben wir gesehen, daß sowohl die Potentiale als auch die Ladungs– bzw. Stromdichte Komponenten von Vierervektoren sind, wodurch sich die einzelnen Wellengleichungen (3.11) zu einer einzelnen Vektorgleichung zusammenfassen lassen:

$$\Box \mathcal{A} = \frac{4\pi}{c}\jmath\,. \tag{3.13}$$

3.4 Der Feldstärketensor

Nachdem wir mit (3.9) die kovariante Form der elektromagnetischen Potentiale bestimmt haben, gilt unser Interesse nun den Feldern selbst, wobei es unsere Absicht ist, Vierertensoren für das elektrische Feld $\underline{E}$ und das magnetische Feld $\underline{B}$ zu finden. Zu diesem Zweck schreiben wir die Beziehungen zwischen Feldern und Potentialen noch einmal komponentenweise auf, vgl. Gleichungen (2.2) und (2.4):

$$E^1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^1}{\partial t} = \frac{\partial A^0}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_0} \tag{3.14.1}$$

$$E^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^2}{\partial t} = \frac{\partial A^0}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_0} \tag{3.14.2}$$

$$E^3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^3}{\partial t} = \frac{\partial A^0}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_0} \tag{3.14.3}$$

$$B^1 = \qquad \cdots \qquad = \frac{\partial A^2}{\partial x_3} - \frac{\partial A^3}{\partial x_2} \tag{3.14.4}$$

$$B^2 = \qquad \cdots \qquad = \frac{\partial A^3}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_3} \tag{3.14.5}$$

$$B^3 = \qquad \cdots \qquad = \frac{\partial A^1}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_1} \,. \tag{3.14.6}$$

Bei der Aufstellung der obenstehenden Beziehungen sind die zusätzlichen Vorzeichen zu beachten, die durch die Ableitung nach kovarianten Koordinaten x_μ zustandekommen. Den rechten Seiten der Gleichungen (3.14) läßt sich entnehmen, daß es sich um die Komponenten eines Vierertensors zweiter Stufe handelt, den wir mit F bezeichnen:

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \,. \tag{3.15}$$

Dieser Tensor ist antisymmetrisch, d.h.

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \,. \tag{3.16}$$

Als Folge dieser Antisymmetrie verschwinden die Diagonalelemente ($F^{\mu\mu} = 0$), und die Elemente des unterenen Dreiecks von F bestimmen die Elemente des oberen Dreiecks und umgekehrt. Die sechs Gleichungen (3.14) legen also die sechs wesentlichen Komponenten und somit den gesamten Tensor F fest:

$$\mathsf{F} = (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.17}$$

Dieser Tensor wird als „Elektomagnetischer Feldstärketensor“ bezeichnet. Die Feldkomponenten in F sind in einer Art und Weise positioniert, daß sowohl die Divergenz und die zeitliche Ableitung von $\underline{E}$ als auch die Rotation von $\underline{B}$ auf einfache Weise gebildet werden können.

3.5 Der duale Feldstärketensor

Aus dem Feldstärketensor F läßt sich durch Überschiebung mit dem ε- Tensor der sog. duale Feldstärketensor $*\mathsf{F}$ generieren. Wie F ist auch ε ein total antisymmetrischer Tensor, allerdings nicht zweiter sondern vierter Stufe. Seine Definition und sein Transformationsverhalten wird im Anhang A.3 ausführlich diskutiert. Hier sei nur erwähnt, daß wir ε in der Tat als Tensor auffassen, dessen Komponenten bei einem Wechsel der Basis mitzuberücksichtigen sind. Der duale Feldstärketensor lautet

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,, \tag{3.18}$$

wobei der Faktor 1/2 dafür sorgt, daß die durch die Schiefsymmetrie redundant vorkommenden Terme nicht mehrfach aufaddiert werden. Zunächst benötigen wir die kovarianten Komponenten von F:

$$\mathsf{F} = (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Mit Hilfe von (3.18) läßt sich daraus der duale Feldstärketensor berechnen:

$$*\mathsf{F} = (*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Gegenüber dem Feldstärketensor F sind hier die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ vertauscht:

$$\begin{array}{lcr} \underline{E} & \Rightarrow & \underline{B} \\ \underline{B} & \Rightarrow & -\underline{E} \end{array} . \tag{3.21}$$

Wie sich im folgenden Abschnitt zeigen wird, lassen sich aus $*\mathsf{F}$ die Divergenz und die zeitliche Ableitung von $\underline{B}$ sowie die Rotation von $\underline{E}$ auf natürliche Weise bilden.

3.6 Die Maxwellschen Gleichungen

Die beiden Feldstärketensoren F und $*\mathsf{F}$ erlauben eine sehr kompakte Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen. Wir demonstrieren dieses zunächst für den inhomogenen Part, indem wir die Divergenz der einzelnen Spalten des Feldstärketensors F mit der elementaren Darstellung (1.1.1) und (1.1.4) vergleichen:

$$[\partial/\partial x^\mu]F^{\mu 0} = \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} = \operatorname{div} \underline{E} = \frac{4\pi}{c}\,(c\rho) \tag{3.22.1}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]F^{\mu 1} = \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3} - \frac{\partial E^1}{\partial (ct)} = [\operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}]^1 = \frac{4\pi}{c}\; j^1 \tag{3.22.2}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]F^{\mu 2} = \frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1} - \frac{\partial E^2}{\partial (ct)} = [\operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}]^2 = \frac{4\pi}{c}\; j^2 \tag{3.22.3}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]F^{\mu 3} = \frac{\partial B^2}{\partial x^1} - \frac{\partial B^1}{\partial x^2} - \frac{\partial E^3}{\partial (ct)} = [\operatorname{rot} \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}]^3 = \frac{4\pi}{c}\; j^3\,. \tag{3.22.4}$$

Da auf der rechten Seite jeweils Komponenten der Viererstromdichte (3.6) stehen, lassen sich die beiden inhomogenen Maxwellgleichungen zu einer Vierertensorgleichung zusammenfassen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu\,. \tag{3.23}$$

Auf analoge Weise können wir die homogenen Maxwellschen Gleichungen (1.1.2) und (1.1.3) mit der Divergenz des dualen Feldstärketensors $*\mathsf{F}$ verbinden:

$$[\partial/\partial x^\mu]\,{*F}^{\mu 0} = \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} = \operatorname{div} \underline{B} = 0 \tag{3.24.1}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]\,{*F}^{\mu 1} = \frac{\partial E^2}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^1}{\partial (ct)} = -\,[\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}]^1 = 0 \tag{3.24.2}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]\,{*F}^{\mu 2} = \frac{\partial E^3}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^2}{\partial (ct)} = -\,[\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}]^2 = 0 \tag{3.24.3}$$

$$[\partial/\partial x^\mu]\,{*F}^{\mu 3} = \frac{\partial E^1}{\partial x^2} - \frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial B^3}{\partial (ct)} = -\,[\operatorname{rot} \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}]^3 = 0\,. \tag{3.24.4}$$

Damit kann auch der homogene Part der Maxwellgleichungen in Vierertensorform geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,{*F}^{\mu\nu} = 0\,. \tag{3.25}$$

Mit (3.23) und (3.25) haben die Maxwellschen Gleichungen eine Form erhalten, die den anfangs genannten Bedingungen genügt:

– Orts- und Zeitkoordinaten gehen symmetrisch in die Gleichungen ein und sind nicht voneinander zu unterscheiden.

– Alle verwendeten Größen sind Vierertensoren.

Unser zu Beginn vorgegebenes Ziel scheinen wir demnach erreicht zu haben und fassen die beiden Gleichungen noch einmal als vorläufiges Endergebnis zusammen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \tag{3.26.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} *F^{\mu\nu} = 0\,. \tag{3.26.2}$$

3.7 Die Lagrangedichte

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit einer Größe befassen, die wir im Rahmen der elementaren Abhandlung bisher nicht kennengelernt haben. In der klassischen Mechanik sind Variationsmethoden beliebte Verfahren zur Herleitung von Bewegungsgleichungen, Beispiele sind das Prinzip der kleinsten Wirkung oder das Hamiltonsche Prinzip [Go83], [LL89]. Das Letztere ist die Grundlage für die Bestimmung einer Teilchentrajektorie $\underline{q}(t)$ mit Hilfe der Euler– Lagrangeschen Gleichungen, deren Konstruktion wir in dem folgenden Abriß kurz skizzieren möchten. Wie für ein gegebenes mechanisches System die Lagrangefunktion L gebildet wird, ist hierbei nicht von Bedeutung und wird als bekannt vorausgesetzt.

– Aufstellung der Lagrangefunktion $L(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$ in Koordinaten, die eventuell vorhandene Zwangsbedingungen berücksichtigen. Mit dieser Lagrangefunktion wird das Wirkungsintegral der Trajektorie $\underline{q}(t)$ gebildet:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\dot{\underline{q}}(t'),\, \underline{q}(t'),\, t'\right) dt'\,. \tag{3.27}$$

– Variation der Bahn $\underline{q}(t)$ unter der Bedingung, daß Anfangspunkt $\underline{q}(t_0)$ und Endpunkt $\underline{q}(t_1)$ festgehalten werden. Gesucht sind Bahnen, deren Wirkung S unter dieser Variation stationär bleibt:

$$\triangle S = 0\,. \tag{3.28}$$

– Eine solche Bahn „extremaler Wirkung“ genügt den Euler– Lagrangeschen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \;=\; 0\,. \tag{3.29}$$

Die besondere Eigenschaft dieser Gleichungen ist ihre Forminvarianz gegenüber beliebigen Transformationen im Konfigurationsraum. Erst hierdurch können an das Problem angepaßte Koordinaten in der Lagrangefunktion frei gewählt werden, um beispielsweise die Bewegung auf vorhandene Zwangsflächen zu beschränken. Die aus der auf diese Weise transformierten Lagrangefunktion gewonnenen Bewegungsgleichungen (3.29) sind dann automatisch im gewählten Koordinatensystem korrekt.

Das Hamiltonsche Prinzip und die Euler– Lagrangeschen Gleichungen lassen sich unter Beachtung weniger Modifikationen auf die Dynamik eines Feldes im Minkowskiraum $\Phi(x^\mu)$ übertragen:

– Die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Phi, \Phi, x^\mu)$ ist eine Funktion des Feldes Φ, dessen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Phi$ nach den Raum– Zeitkoordinaten und den Koordinaten x^μ selbst. Das Wirkungsintegral erstreckt sich über die Raum– und Zeitvariablen, wodurch $\mathcal{L}$ in jedem Punkt mit einem vierdimensionalen Volumenelement $dV^{(4)}$ versehen wird und somit den Charakter einer Dichte annimmt:

$$S \;=\; \int\limits_V \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\,\mu}}\Phi(x'^{\,\mu}),\; \Phi(x'^{\,\mu}),\; x'^{\,\mu}\right) dV'^{\,(4)}\,. \tag{3.30}$$

Das Integrationsgebiet V ist ein beliebiger Raum– Zeitbereich, dessen Rand wir mit ∂V bezeichnen.

– Die Variation des Feldes Φ geschieht innerhalb von V und wird am Rand ∂V fixiert. Diese Einschränkung entspricht bei Teilchentrajektorien $\underline{q}(t)$ der Vorschrift, daß Anfangspunkt $\underline{q}(t_0)$ und Endpunkt $\underline{q}(t_1)$ fest vorgegeben sind. Gesucht ist das Feld Φ stationärer Wirkung:

$$\triangle S \;=\; 0\,. \tag{3.31}$$

– Das so festgelegte Feld gehorcht Feldgleichungen, die aus den Euler– Lagrange– Gleichungen entstehen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \;=\; 0\,. \tag{3.32}$$

Die Herleitung der Feldgleichungen (3.32) aus dem Hamiltonschen Prinzip ist vollkommen analog zur Mechanik und kann in Lehrbüchern klassischer Feldtheorien wie [LL89] verfolgt werden. Wie bereits erwähnt ist die Invarianz der Lagrangedichte gegenüber Koordinatentransformationen eine notwendige Voraussetzung für deren Funktion als Generator von Bewegungsgleichungen. Die für uns relevanten Koordinatensysteme werden durch Lorentztransformationen ineinander überführt, wodurch $\mathcal{L}$ das Transformationsverhalten eines Viererskalares erhält.

Auch die Maxwellschen Gleichungen können aus einer Lagrangedichte erzeugt werden, welche als Feldvariablen die Komponenten A_μ des Viererpotentials enthält und folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu},\, A_\nu,\, x^\mu\right) &= -\frac{1}{16\pi}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\, j^\alpha A_\alpha \\ &= -\frac{1}{16\pi}\, g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho}\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}\right]\left[\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right] - \frac{1}{c}\, j^\alpha A_\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Zum Beweis erzeugen wir aus (3.33) die Euler– Lagrange– Gleichungen und zeigen, daß es sich um die Maxwellschen Gleichungen handelt. Im ersten Schritt berechnen wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}} &= -\frac{1}{16\pi}\left[g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right) + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}\right)\right. \\ &\qquad \left. - g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\right) - g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x^\rho}\right) = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Die vier Terme innerhalb der eckigen Klammer konnten durch die Symmetrie der $g^{\mu\nu}$ und durch Vertauschung von Summationsindizes auf eine gemeinsame Form zurückgeführt werden. Im zweiten Schritt bestimmen wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c}\, j^\nu\,. \tag{3.35}$$

Zusammengefaßt ergeben beide Rechenschritte

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\, j^\nu = 0\,. \tag{3.36}$$

Dieses Resultat reproduziert tatsächlich die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen und beweist somit die Richtigkeit des Ansatzes (3.33):

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \,. \tag{3.37}$$

In der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ wurden statt der Feldkomponenten $F^{\mu\nu}$ die Komponenten des Viererpotentials A^μ als dynamische Variablen gewählt. Die homogenen Maxwellschen Gleichungen sind somit als Integrabilitätsbedingungen gewissermaßen schon in die Lagrangedichte integriert und treten nicht mehr separat in Erscheinung. Mit der Kenntnis von $\mathcal{L}$ steht uns nicht nur ein Werkzeug zur ökonomischen Erzeugung von Feldgleichungen zur Verfügung, vielmehr lassen sich hiermit auch allgemeine Eigenschaften des Feldes wie die Existenz von Erhaltungssätzen studieren.

3.8 Der Energie– Impulstensor und die Viererkraft

In der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes (3.33) ist nur die Viererstromdichte $\jmath(x^\mu)$ explizit vom betrachteten Raum– Zeitpunkt abhängig. Die Ladungs– und Stromdichtekomponenten der Viererstromdichte beschreiben den dynamischen Zustand der Ladungsträger, die die Quellen des Feldes sind und somit ständig Energie– und Impulsanteile auf dieses übertragen bzw. von dort absorbieren. Nur wenn weder Ströme noch Ladungen existieren, bilden die elektromagnetischen Felder ein abgeschlossenes System. In diesem Spezialfall des materiefreien Raumes verschwindet $\jmath$ aus der Lagrangedichte, und die noch verbleibenden Variablen sind die Potentialkomponenten A_α und deren Ableitungen. Mit dem Wegfall der Koordinaten x^μ wird die Lagrangedichte bezüglich Raum und Zeit translationsinvariant, denn die Dynamik der Felder bleibt bei einer globalen Verschiebung der Koordinaten um den Betrag a^μ mit

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{3.38}$$

unverändert. In der Zeit des Ersten Weltkriegs stellte die Mathematikerin Emmy Noether ein Theorem auf [Noe18], welches in der Lagrangedichte vorhandene Invarianzen mit Erhaltungssätzen verknüpft. Diesem Theorem zufolge entspricht die hier vorliegende Invarianz gegenüber Orts– und Zeitverschiebungen der Erhaltung von Feldimpuls und Feldenergie. Wir folgen nun dem Standardverfahren der klassischen Feldtheorie und leiten die Bilanzgleichung für Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes aus dessen Lagrangedichte ab. Ausgangspunkt unserer Rechnungen sind $\mathcal{L}$ selbst und die daraus abgeleiteten Euler– Lagrangeschen Gleichungen, die wir hier zur Erinnerung noch einmal notieren:

$$\mathcal{L} \;=\; \mathcal{L}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu},\, A_\alpha,\, x^\mu\right) \tag{3.39.1}$$

$$0 \;=\; \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\,. \tag{3.39.2}$$

Da wir das in der Feldtheorie übliche Symbol ∂ für alle Ableitungen beibehalten wollen, unterscheiden wir die Differentiation der Lagrangedichte nach ihrer expliziten Koordinatenabhängigkeit durch den Ausdruck $\mathcal{L}_{|\mu}$. Wir bilden nun das totale Differential

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} \;&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha}\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} + \mathcal{L}_{|\nu} \\
&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\right]\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} + \mathcal{L}_{|\nu} \\
&=\; \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\right] + \mathcal{L}_{|\nu}\,,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

wobei wir den zweiten Term der ersten Zeile mit Hilfe der Euler– Lagrange– Gleichungen (3.39.2) umgeschrieben haben. Das Resultat kann in die Form einer Bilanzgleichung gebracht werden:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} \;-\; \delta^\mu{}_\nu\,\mathcal{L}\right] \;=\; -\mathcal{L}_{|\nu}\,. \tag{3.41}$$

Der Term $-\mathcal{L}_{|\nu}$ ist die Quelle für den Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern, der somit für festgehaltenes ν jeweils einer Kontinuitätsgleichung gehorcht. Ist die Lagrangedichte bezüglich x^ν invariant, verschwindet der Quellterm $-\mathcal{L}_{|\nu}$, und die Bilanzgleichungen (3.41) werden zu Erhaltungssätzen. Dem Noethertheorem zufolge handelt es sich um die Bilanz von Impuls und Energie, wodurch wir die in der eckigen Klammer eingeschlossenen Terme als Komponenten eines Tensors $T^{\mu\nu}$ auffassen können, der den Energie– und Impulshaushalt des elektromagnetischen Feldes beschreibt und daher als Energie– Impulstensor bezeichnet wird:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\hat{T}^\mu{}_\nu \;=\; -\mathcal{L}_{|\nu} \tag{3.42.1}$$

$$\hat{T}^\mu{}_\nu \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}}\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} \;-\; \delta^\mu{}_\nu\,\mathcal{L}\,. \tag{3.42.2}$$

Diese Form für $\hat{T}^\mu{}_\nu$ zusammen mit der hier vorgestellten Herleitung kann in jedem Lehrbuch über klassische Feldtheorie wie [LL89] nachvollzogen werden. Mit der Dachschreibweise deuten wir an, daß $\hat{T}^\mu{}_\nu$ noch nicht die endgültige Darstellung des Energie– Impulstensors ist, denn:

– Der durch (3.42) definierte Tensor $\hat{T}^\mu{}_\nu$ ist nicht eindeutig, weil er innerhalb eines Divergenzausdruckes steht. Damit ist die Addition von Zusatztermen $\tau^\mu{}_\nu$ erlaubt, deren Divergenz verschwindet:

$$T^\mu{}_\nu = \hat{T}^\mu{}_\nu + \tau^\mu{}_\nu\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu}\tau^\mu{}_\nu = 0\,. \tag{3.43}$$

– Erst durch eine zusätzliche Symmetrieforderung wird der Energie– Impulstensor eindeutig festgelegt:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}\,. \tag{3.44}$$

Unter Berücksichtigung dieser Zusatzbedingung können wir nun den Energie– Impulstensor des elektomagnetischen Feldes angeben. Zunächst setzen wir die Ausdrücke (3.33) und (3.34) für die Lagrangedichte und ihre Ableitung ein:

$$\hat{T}^\mu{}_\nu = -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} \;+\; \delta^\mu{}_\nu\left[\frac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}\,j^\alpha A_\alpha\right]. \tag{3.45}$$

Um diesen Ausdruck zu symmetrisieren, addieren wir den folgenden Term $\tau^\mu{}_\nu$ hinzu, dessen Divergenz wir ebenfalls berechnen:

$$\tau^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} \tag{3.46.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\tau^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu\alpha}\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} \;+\; F^{\mu\alpha}\,\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right] = \frac{1}{c}\,j^\alpha\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}\,. \tag{3.46.2}$$

Der erste Summand von (3.46.2) wurde mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen (3.26) umgeformt, und der zweite Summand verschwindet, weil der antisymmetrische Tensor

$F^{\mu\nu}$ mit dem symmetrischen Tensor der zweifachen Ableitungen von A_ν überschoben wird. Addieren wir $\tau^\mu{}_\nu$ zum ersten Term des Energie– Impulstensors (3.45), erhalten wir

$$-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}\left[\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}\right]=\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}\,. \tag{3.47}$$

Die Gleichung (3.46.2) zeigt uns allerdings, daß der zur Symmetrisierung verwendete Zusatzterm $\tau^\mu{}_\nu$ nur bei verschwindender Stromdichte divergenzfrei ist. Daher kompensieren wir die bei Anwesenheit von Materie auftretende zusätzliche Divergenz durch einen weiteren passend gewählten Quellterm in der Bilanzgleichung. Außerdem fassen wir auch den stromabhängigen Teil aus $\hat{T}^\mu{}_\nu$ als einen Quellterm auf, indem wir dessen Divergenz bilden:

$$\delta^\mu{}_\nu\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}(j^\alpha A_\alpha)\;=\;\frac{1}{c}\,\frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\nu}A_\alpha+\frac{1}{c}\,j^\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\;=\;-\mathcal{L}_{|\nu}+\frac{1}{c}\,j^\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} \tag{3.48}$$

Wir haben bereits festgestellt, daß sich die explizite Koordinatenabhängigkeit der Lagrangedichte auf die Stromdichte $\boldsymbol{j}(x^\mu)$ beschränkt, wodurch der erste Term von (3.48) als $-\mathcal{L}_{|\nu}$ identifiziert werden kann. Nun setzen wir alle Teilresultate in die Bilanzgleichung ein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}\,+\,\delta^\mu{}_\nu\,\frac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right]\;-\;\mathcal{L}_{|\nu}+\frac{1}{c}\,j^\alpha\,\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}&\\ =\;-\;\mathcal{L}_{|\nu}+\frac{1}{c}\,j^\alpha\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}\,.&\end{aligned} \tag{3.49}$$

Wie bereits angedeutet, kompensiert der letzte Term auf der rechten Seite von (3.49) die durch die Symmetrisierung entstandene zusätzliche Divergenz. Schließlich verschieben wir alle Quellterme auf die rechte Seite und fassen sie zusammen:

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_{|\nu}+\frac{1}{c}\,j^\alpha\,\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}\,+\mathcal{L}_{|\nu}-\frac{1}{c}\,j^\alpha\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\;&=\;\frac{1}{c}\,j^\alpha\left[\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}\right]\\ &=\;-\frac{1}{c}\,F_{\nu\alpha}\,j^\alpha\,.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Damit erhält die Energie– Impulsbilanz folgende Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu}\,+\,\delta^\mu{}_\nu\,\frac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right]=-\frac{1}{c}\,F_{\nu\alpha}\,j^\alpha\,. \tag{3.51}$$

In einem abschließenden Schritt ziehen wir den Index ν hoch, passen die Stellung der Summationsindizes entsprechend an und führen damit die endgültige Gestalt des Energie– Impulstensors $T^{\mu\nu}$ ein:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}\, F^{\nu\alpha}\, j_\alpha \tag{3.52.1}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]. \tag{3.52.2}$$

Bisher haben wir in diesem Kapitel alle konventionellen Größen der Elektrodynamik in einer Vierernotation zusammenfassen können, und es ist zu vermuten, daß sich auch die Energie– Impulsbilanz (3.52) als kovariante Vereinheitlichung der beiden elementar aufgestellten Teilbilanzen (2.17) und (2.22) verstehen läßt. Da in Abschnitt 2.4 die Lorentzkraftdichte

$$\underline{f} = \rho \underline{E} + \frac{1}{c}\, \underline{j} \times \underline{B} \tag{3.53}$$

als Quelle des Impulses auftrat, wollen wir untersuchen, inwiefern der Quellterm dieses Abschnittes ebenfalls die Lorentzkraft repräsentiert:

$$\frac{1}{c}\, F^{\nu\alpha}\, j_\alpha = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ -j^1 \\ -j^2 \\ -j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(\,\underline{j} \cdot \underline{E}\,) \\ \rho E^1 + \frac{1}{c}(\underline{j} \times \underline{B})^1 \\ \rho E^2 + \frac{1}{c}(\underline{j} \times \underline{B})^2 \\ \rho E^3 + \frac{1}{c}(\underline{j} \times \underline{B})^3 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Tatsächlich enthält der auf der rechten Seite von (3.54) stehende Vierervektor die drei Lorentzkraftkomponenten. Ergänzt werden diese in der Nullkomponente durch den Term $(\,\underline{j} \cdot \underline{E}\,)$, der den Energieaustausch zwischen Feldern und Ladungsträgern beschreibt. Mit dieser Erweiterung der Lorentzkraft fassen wir alle Quellen- bzw. Senkenterme der elementaren Teilbilanzen in einem Kraftdichte– Vierervektor f zusammen:

$$f^\nu = \frac{1}{c}\, F^{\mu\nu} j_\mu\,. \tag{3.55}$$

Durch die Einführung dieser Viererkraft erhält die Energie– Impulsbilanz eine leichter verständliche Form, die ausgehend von den elementaren Bilanzgleichungen ohnehin zu erwarten gewesen wäre:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = -f^\nu\,. \tag{3.56}$$

Um den Energie– Impulstensor (3.52.2) den elementaren Bilanzen (2.17) und (2.19) gegenüberstellen zu können, muß die Definition (3.17) des Feldstärketensors eingesetzt und komponentenweise verglichen werden. Dabei wird deutlich, wie die Energiedichte w, der Poyntingvektor $\underline{S}$ und der Maxwellsche Spannungstensor $\boldsymbol{T}$ im Energie– Impulstensor integriert sind:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & [\underline{S}/c]^T \\ \underline{S}/c & T^{ij} \end{pmatrix} . \tag{3.57}$$

Die obenstehende Matrix zeigt, daß der Maxwellsche Spannungstensor im Energie–Impulstensor durch die Energie– und die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes ergänzt und so auf natürliche Weise kovariant erweitert wird. Auch die in der elementaren Abhandlung festgestellte Doppelbedeutung des Poyntingvektors $\underline{S}$ wird hier noch einmal offensichtlich: Er steht in der nullten Zeile von Gleichung (3.57) für die Energiestromdichte, während er in der nullten Spalte die Impulsdichte repräsentiert.

4 Die Cartanschen Differentialformen

Es mag verwunderlich erscheinen, daß wir die Analyse der Maxwellschen Gleichungen nach den Resultaten des letzten Kapitels nicht abschließen, aber eine genauerere Betrachtung von (3.26) zeigt, daß diese Form nicht in jeder Hinsicht zufriedenstellend ist. Auch wenn hier alle physikalischen Größen relativistisch kovariant geschrieben werden konnten, lassen sich noch immer zwei Kritikpunkte formulieren:

– Die Gleichungen (3.26) sind nicht Gleichungen für Tensoren, sondern sie verwenden Komponentenschreibweise.

– Es fehlen in (3.26) Differentialoperatoren mit Tensorcharakter, vergleichbar mit den Operatoren grad, rot und div des dreidimensionalen Ortsraumes.

Die beiden obengenannten Punkte signalisieren eine mangelhafte Anpassung der bisher verwendeten mathematischen Objekte an das zu beschreibende Phänomen. Die Gleichungen (3.26) enthalten die Skalare 4π und c sowie die Komponenten des Vierervektors j und der schiefsymmetrischen Feldstärketensoren F bzw. $*\mathsf{F}$.

Bisher wurde den Symmetrieeigenschafen des Feldstärketensors keine besondere Bedeutung beigemessen. Im weiteren Verlauf dieser Untersuchung werden wir jedoch erkennen, daß sich in der Schiefsymmetrie von F der Schlüssel zur kovarianten und komponentenfreien Darstellung der Elektrodynamik verbirgt. Im Raum der allgemeinen Tensoren bilden die schiefsymmetrischen Tensoren einen Unterraum, der mit der Variation ihrer wesentlichen Komponenten durchlaufen wird. Wie die Darstellung der auf diesen Unterraum beschränkten antisymmetrischen Tensoren für beliebige Dimensionen aussieht, zeigen wir im Anhang D.1. Dort und im folgenden Abschnitt 4.1 demonstrieren wir, daß die Basistensoren dieser schiefsymmetrischen Unterräume Flächen–, Volumen– und Hypervolumenelemente erzeugen.

Unter dem Aspekt der Schiefsymmetrie ist es naheliegend, mit alternierenden Differentialformen zu arbeiten. Diese Theorie wurde von Élie Joseph Cartan am Anfang des 20. Jahrhunderts als Werkzeug der Differentialgeometrie entwickelt [Ca46] und fand u.a. Anwendung in der Elektrodynamik und der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wie der Begriff „Differentialformen“ anklingen läßt, handelt es sich um lineare Abbildungen von Vektoren bzw. Koordinatentupeln auf reelle Zahlen, die als Differentiale interpretiert werden. Diese Differentiale entstammen dem Tangentialvektorbüschel an diejenigen Koordinatenlinien, die sich im jeweils betrachteten Punkt des Raum– Zeit– Kontinuums schneiden. Als Nebeneffekt entstehen durch Differentialformen automatisch sinnvolle Integranden für Oberflächen- und Volumenintegrale, wodurch sich der Gaußsche und der Stokessche Integralsatz quasi von selbst ergeben. Es ist sogar möglich, diese Integralsätze als Spezialfälle eines generellen Integralsatzes (des allgemeinen Satzes von

Stokes) zusammenzufassen, was wir hier zwar in einem Beispiel erläutern, ansonsten jedoch nicht weiter vertiefen werden.

4.1 Herleitung der Feldform

Als einführendes Beispiel wollen wir zeigen, wie aus dem Feldstärketensor die elektromagnetische Feldform abgeleitet wird. Den Konventionen der Differentialgeometrie gemäß erfordert der Abbildungscharakter von Differentialformen die Verwendung kovarianter Komponenten bezüglich einer Dualbasis. Diese Darstellung ergibt sich auf natürliche Weise aus der Betrachtung differenzierbarer Mannigfaltigkeiten, in denen Vektoren ähnlich wie Gradienten in einer Tangentialbasis entlang der Koordinatenlinien entwickelt werden und Differentialformen erster Stufe den Charakter von Richtungsableitungen besitzen [BM94]. Um nicht weiter vom Thema Elektrodynamik abzuschweifen, folgen wir dieser Konvention, ohne ihre Ursprünge aus der Differentialgeometrie weiter zu vertiefen. Der Feldstärketensor in der dualen Basis geschrieben lautet

$$\mathsf{F} = F_{\mu\nu}\ \underline{u}^{\mu} \otimes \underline{u}^{\nu}\,. \tag{4.1}$$

Die Basisformen sind hier in allgemeiner Vektorschreibweise notiert. Aufgrund der Schiefsymmetrie der Komponenten in (4.1) können wir zusammenfassen:

$$\mathsf{F} = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\,(\underline{u}^{\mu} \otimes \underline{u}^{\nu} - \underline{u}^{\nu} \otimes \underline{u}^{\mu})\,. \tag{4.2}$$

Die eingeschränkte Summe in (4.2) durchläuft nur noch die wesentlichen Komponenten von $F_{\mu\nu}$, und die Klammerausdrücke enthalten die sechs Basiselemente des Unterraums der antisymmetrischen Tensoren. Durch sie wird das Schiefprodukt der Formen $\underline{u}^{\mu}$ und $\underline{u}^{\nu}$ definiert:

$$\underline{u}^{\mu} \wedge \underline{u}^{\nu} := \underline{u}^{\mu} \otimes \underline{u}^{\nu} - \underline{u}^{\nu} \otimes \underline{u}^{\mu}\,. \tag{4.3}$$

In dieser Schiefproduktbasis lautet der Feldstärketensor:

$$\mathsf{F} = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\,\underline{u}^{\mu} \wedge \underline{u}^{\nu}\,. \tag{4.4}$$

Wie in der Einführung dieses Kapitels angedeutet, interpretieren wir die Basisformen als Erzeugende von Differentialen und ersetzen formal $\underline{u}^{\mu} \Rightarrow dx^{\mu}$. Außerdem wählen wir ab jetzt für Differentialformen griechische Buchstaben. Damit lautet die endgültige Form des Feldstärketensors:

$$F =: \boldsymbol{\beta} = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu \,. \tag{4.5}$$

Die eingeschränkte Summation über die wesentlichen Komponenten der Differentialform wird von nun an stillschweigend vorausgesetzt und nicht mehr explizit ausgeschrieben. In der Definition (4.3) ist zu erkennen, daß das Schiefprodukt die formale Struktur einer Determinante besitzt, in der das Tensorprodukt der den einzelnen Dualräumen entnommenen Basisformen das Produkt von Matrixkomponenten in einer gewöhnlichen Determinante ersetzt:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = \begin{vmatrix} dx^{\mu\,(1)} & dx^{\mu\,(2)} \\ dx^{\nu\,(1)} & dx^{\nu\,(2)} \end{vmatrix} \,. \tag{4.6}$$

Die Nummern in Klammern bezeichnen den Grunddualraum der jeweiligen Basisform. Die Darstellung (4.6) soll dazu dienen, den Überblick über die Linearkombinationen zu bewahren, aus denen die Schiefprodukte bestehen. Sie ist besonders nützlich bei der Diskussion mehrfacher Schiefprodukte in Anhang D.1. Sie ermöglicht uns außerdem, die Wirkungsweise von Differentialformen besser zu verstehen.

Die Auswirkung von Abbildungen des Dualraumes auf Vektoren beschreiben wir in Anhang A.2, wo wir insbesondere in Gleichung (A.6) zeigen, daß die Elemente χ^μ der dualen Basis einen Vektor A auf seine kontravarianten Komponenten abbilden:

$$dx^\mu(A) := \chi^\mu(A) = A^\mu \,. \tag{4.7}$$

In diesem Sinne können wir die Feldform $\boldsymbol{\beta}$ als eine Bilinearform auffassen, die aus zwei Vierervektoren eine reelle Zahl generiert. Wir werden die Wirkung dieser Abbildung anhand eines beliebig gewählten Basiselementes $dx^\mu \wedge dx^\nu$ studieren, das wir auf zwei Vierervektoren $A = A^\alpha \underline{u}_\alpha$ und $B = B^\beta \underline{u}_\beta$ anwenden:

$$\Big[\, dx^\mu \wedge dx^\nu \Big](A, B) := dx^\mu(A) \wedge dx^\nu(B) \,. \tag{4.8}$$

Man erkennt, daß die Abbildung der Vierervektoren jeweils separat in ihren Grunddualräumen geschieht. Wir schreiben jetzt das Basiselement (4.8) in der Determinantenform (4.6)

$$\Big[\, dx^\mu \wedge dx^\nu \Big](A, B) = \begin{vmatrix} dx^\mu(A) & dx^\mu(B) \\ dx^\nu(A) & dx^\nu(B) \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

und erhalten nach Einsetzen von (4.7) das Resultat

$$\Big[\, dx^\mu \wedge dx^\nu \Big](\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \begin{vmatrix} A^\mu & B^\mu \\ A^\nu & B^\nu \end{vmatrix} \,. \tag{4.10}$$

Dieses ist der Flächeninhalt des durch die Vektorkomponenten $A^\mu \underline{u}_\mu$ und $B^\nu \underline{u}_\nu$ (keine Summation) aufgespannten Parallelogramms. Wir möchten noch einmal betonen, daß die Größen dx^μ selbst keine Differentiale sind, sondern Basisformen. Erst wenn die Argumente A und B zu Differentialen werden, entsteht durch $dx^\mu \wedge dx^\nu$ ein infinitesimales Flächenelement.

Wir betrachten nun das Integral der Feldform $\boldsymbol{\beta}$ über eine Fläche $\mathsf{F}(u, v)$ des Minkowskiraumes, die wir mit den Koordinaten u und v parametrisieren. Entlang der Koordinatenlinien $v =$ const. und $u =$ const verlaufen die Tangentialvektoren $\mathbf{t}_u = (\partial \mathsf{F}/\partial u)\, du$ und $\mathbf{t}_v = (\partial \mathsf{F}/\partial v)\, dv$. Setzt man die am jeweils betrachteten Flächenpunkt vorgefundenen Tangentialvektoren als Argumente in $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v)$ ein, entstehen Flächenelemente in der Gestalt von Jacobideterminanten:

$$\Big[\, dx^\mu \wedge dx^\nu \Big](\mathbf{t}_u, \mathbf{t}_v) = \begin{vmatrix} \partial F^\mu/\partial u & \partial F^\mu/\partial v \\ \partial F^\nu/\partial u & \partial F^\nu/\partial v \end{vmatrix} du\, dv \,. \tag{4.11}$$

Diese Beziehung erlaubt uns, das Integral auswerten, indem wir die Form $\boldsymbol{\beta}$ selbst als Integranden verwenden:

$$\Phi_M := \int_{\mathsf{F}} \boldsymbol{\beta} = \int_{\mathsf{F}} F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \int F_{\mu\nu} \begin{vmatrix} \partial F^\mu/\partial u & \partial F^\mu/\partial v \\ \partial F^\nu/\partial u & \partial F^\nu/\partial v \end{vmatrix} du\, dv \tag{4.12}$$

Im Vergleich mit (3.19) lassen sich die einzelnen Beiträge von Φ_M identifizieren:

– F_{12}, F_{13} und F_{23}: Magnetischer Fluß.

– F_{01}, F_{02} und F_{03}: Elektrische Spannung integriert über die Zeit.

Eine tiefere Diskussion des physikalischen Gehaltes von Gleichung (4.12) entspräche nicht dem Zweck dieses Textes, und somit begnügen wir uns mit der Anmerkung, daß in (4.12) offenbar alle Elemente zur Aufstellung des Induktionsgesetzes in der integralen Version vorhanden sind. Die Feldform und weitere noch einzuführende Differentialformen erlauben es, die Maxwellschen Gleichungen auf alternative Weise zu formulieren und bieten darüberhinaus die Möglichkeit, den Integralsätzen der Elektrodynamik eine einheitliche Darstellung zu geben.

4.2 Die äußere Algebra

Nachdem wir im letzten Abschnitt den Aufbau und die Wirkungsweise von Differentialformen am Beispiel der Feldform $\boldsymbol{\beta}$ diskutiert haben, scheint nun eine systematische Darstellung dieser Theorie angebracht zu sein. Als neuen Begriff hatten wir das Schiefprodukt $\wedge$ kennengelernt, das als antisymmetrische Linearkombination des Tensorproduktes zweier Vektoren eingeführt wurde (4.3). Im Zusammenhang mit Differentialformen bekommt $\wedge$ jedoch den Charakter einer Verknüpfung mit eigenständigen Rechenregeln und Gesetzmäßigkeiten, die unter der Bezeichnung „Äußere Algebra“ zusammengefaßt sind. Dieser Name wurde Mitte des neunzehnten Jahrunderts von Hermann Günther Graßmann in seiner Arbeit [Gra44] über lineare Strukturen und einen allgemeinen Vektorkalkül geprägt. Das Schiefprodukt ist in der Tat ein äußeres Produkt, da es aus zwei Differentialformen eine dritte erzeugt, die nicht Element einer der Räume der beiden Faktoren ist. In diesem Sinne ist auch das Skalarprodukt ein äußeres Produkt, doch hat sich für dieses der Name „Inneres Produkt“ etabliert, um es vom Schiefprodukt zu unterscheiden. Eine Differentialform p–ter Stufe (p–Form) hat die Gestalt

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\,, \tag{4.13}$$

wobei sich die obenstehende Summe auf die wesentlichen Komponenten der schiefsymmetrischen Koeffizienten $\omega_{i_1 \cdots i_p}$ beschränkt, ohne daß wir dieses im Folgenden explizit erwähnen. Die p–fachen Schiefprodukte der Basisformen dx^i stehen für eine total antisymmetrische Linearkombination von Tensorprodukten $dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}$. In Anhang D.1 wird gezeigt, daß diese analog zum zweistufigen Fall (4.6) ebenfalls als eine formale Determinante angesehen werden können:

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = \begin{vmatrix} dx^{i_1\,(1)} & \cdots & dx^{i_1\,(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_p\,(1)} & \cdots & dx^{i_p\,(p)} \end{vmatrix} . \tag{4.14}$$

In der nun folgenden axiomatischen Einführung betrachten wir eine Differentialform p–ter Stufe als Element eines Vektorraumes Λ^p, der über dem n–dimensionalen Grundvektorraum $\mathbb{V}^n$ definiert ist und daher auch als $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ bezeichnet wird. Ist $\boldsymbol{\omega}_1$ eine p–Form und $\boldsymbol{\omega}_2$ eine q–Form, dann ist das äußere Produkt $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$ eine $(p+q)$–Form. Von Null verschiedene Resultate erhält man nur unter der Einschränkung

$$0 \le p + q \le n\,, \tag{4.15}$$

denn bei einem n–dimensionalem Grundvektorraum treten in einer Kombination von mehr als n Basisformen zwangsläufig einige mehrfach auf. Anhand der Determinantenstruktur der Basisformen läßt sich leicht nachvollziehen, daß das Produkt $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$ in diesem Fall verschwindet. In der untenstehenden Auflistung von Rechenregeln für das Schiefprodukt $\wedge$ besitzen die Differentialformen $\boldsymbol{\omega}_i$ und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$ für gleiches i dieselbe Stufe:

$$(\boldsymbol{\omega}_1 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 \tag{4.16.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2) = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 \tag{4.16.2}$$

$$(a\, \boldsymbol{\omega}_1) \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = a(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) \tag{4.16.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge (a\, \boldsymbol{\omega}_2) = a(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) \tag{4.16.4}$$

$$(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge (\boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_3) \tag{4.16.5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 = (-1)^{pq}\, \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \boldsymbol{\omega}_1 \tag{4.16.6}$$

Die nachfolgenden Kommentare sollen helfen, die in den Gleichungen (4.16) postulierten Eigenschaften mit dem bislang bekannten Verhalten schiefsymmetrischer Tensoren in Übereinstimmung zu bringen:

- *Gleichungen (4.16.1)–(4.16.4):*
  Diese Gleichungen besagen, daß $\wedge$ in beiden Faktoren linear ist. Im Rahmen der axiomatischen Einführung des äußeren Produktes ist das eine natürliche Forderung an die Verknüpfung einer Algebra, deren Bestandteile bereits lineare Strukturen in anderen Räumen sind. Die Determinantenschreibweise (4.6) und (D.21) für die Basisformen $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ legt bereits einige Eigenschaften des Schiefproduktes fest, diese sind jedoch aufgrund der Linearität der Determinante in jedem Spaltenvektor mit der Linearitätsforderung an $\wedge$ verträglich. Besteht einer der Faktoren aus einer Linearkombination mehrerer $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, ist das Verhalten des Schiefproduktes noch unbestimmt. In diesem Fall sind die Gleichungen (4.16.1)–(4.16.4) eine sinnvolle Erweiterung der bisherigen Darstellung von $\wedge$, die es erlaubt, das äußere Produkt beliebiger Differentialformen in eine Linearkombination von Basisformen $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ zu zerlegen.

- *Gleichung (4.16.5):*
  Diese Gleichung beschreibt das Assoziativgesetz für mehrfache Schiefprodukte. Aufgrund der schon gesicherten Linearität reduziert sich diese Forderung auf die Assoziativität bei der Verknüpfung von Basisformen, für die wir die Determinantengestalt (D.21) bereits kennen. Die Konstruktion des Schiefproduktes zweier Basisformen erfolgt durch den Aufbau einer $(p + q)$–reihigen Determinante aus p–reihigen und q–reihigen Unterdeterminanten, welche den einzelnen Faktoren entstammen. Hierbei wird der Prozeß der Entwicklung der $(p + q)$–reihigen

Determinante nach entweder p oder q Spalten umgekehrt. Wird dieses Verfahren iterativ in mehreren Schritten angewandt, entspricht das einem mehrfachen Schiefprodukt. Je nachdem, ob die erste Entwicklung nach den Spalten des ersten oder des letzten Faktors erfolgt, korrespondiert diese Zerlegung entweder mit der linken oder der rechten Seite von Gleichung (4.16.5). Da beide Vorgehensweisen dasselbe Ergebnis liefern, ist das Assoziativitätsgesetz für die Basisformen und damit für alle Formen verifiziert.

– *Gleichung (4.16.6):*
  Die schon bekannte Linearität des äußeren Produktes erlaubt es, sich auf den Effekt der Vertauschung zweier Basisformen zu beschränken. Hierbei muß jedes dx^i der rechtsstehenden Basisform $\boldsymbol{\omega}_2$ (q Stück) mit allen dx^i der linksstehenden Basisform $\boldsymbol{\omega}_1$ (p Stück) vertauscht werden, wobei jeder Tauschvorgang jeweils ein Minuszeichen produziert. Da dieses insgesamt pq Vertauschungen sind, ergibt sich die oben angegebene Formel (4.16.6).

4.3 Der Hodge Operator

In Kapitel 3 hatten wir den dualen Feldstärketensor $*\mathsf{F}$ eingeführt, um die homogenen Maxwellschen Gleichungen kovariant formulieren zu können. Gegenüber dem Feldstärketensor F sind in der dualen Version alle Koeffizienten gemäß der Bildungsvorschrift (3.18) dergestalt vertauscht, daß sie Vorfaktor des komplementären Gegenstücks zum ursprünglichen Basistensor werden. So steht die elektrische Feldkomponente E^1 beispielsweise in F vor dem Basiselement $\underline{u}_0 \otimes \underline{u}_1$, in $*\mathsf{F}$ dagegen vor dem Basislelement $\underline{u}_2 \otimes \underline{u}_3$. Wir werden in diesem Abschnitt das Konzept des dualen schiefsymmetrischen Tensors auf Differentialformen übertragen. Den Austausch der Basisformen durch ihre komplementären Gegenstücke übernimmt eine Abbildung des Raumes $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ in den Raum $\Lambda^{n-p}[\mathbb{V}^n]$. Eine eineindeutige Verknüpfung beider Räume ist möglich, weil sie nach (D.15) dieselbe Dimension besitzen und daher als Vektorräume isomorph sind:

$$\dim \Lambda^p[\mathbb{V}^n] = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Lambda^{n-p}[\mathbb{V}^n]\,. \tag{4.17}$$

Die Realisierung dieser Abbildung ist der Hodge Operator $*$, welcher eine p–Form $\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ in ihr duales Gegenstück $*\boldsymbol{\alpha} \in \Lambda^{n-p}[\mathbb{V}^n]$ überführt. Bei der Berechnung der dualen Tensoren trat die Metrik als ein technisches Detail zum Senken der Indizes in Erscheinung. Bei der Konstruktion des Hodge Operators spielt sie hingegen eine zentrale Rolle. Zunächst untersuchen wir, wie die Metrik des Grundvektorraumes $\mathbb{V}^n$ eine Metrik im Raum $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ der äußeren Algebra induziert.Während die Metrik des

Grundvektorraumes das Skalarprodukt ($\underline{A} \cdot \underline{B}$) zweier Vektoren festlegt, definiert die Metrik der äußeren Algebra ein Skalarprodukt $<\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}>$ zwischen Differentialformen. Entwickeln wir die beiden Faktoren des Skalarproduktes in einer Basis des $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$, erhalten wir

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{4.18.1}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_{j_1 \cdots j_p}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \,. \tag{4.18.2}$$

Als inneres Produkt muß $<\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}>$ in beiden Faktoren linear sein:

$$<\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}> = \alpha_{i_1 \cdots i_p} \beta_{j_1 \cdots j_p} < dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \cdot \; dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} > \;. \tag{4.19}$$

Es genügt also, eine Definition für das Produkt der Basisformen in (4.19) zu treffen. Da im Fall $p = 1$ das Skalarprodukt des Grundvektorraumes reproduziert werden muß und zusätzlich sowohl die Symmetrie bei Vertauschung beider Faktoren als auch die Schiefsymmetrie der Basisformen bei Vertauschung der dx^i bzw. dx^j zu berücksichtigen ist, liegt es nahe, dieses Skalarprodukt als Gramsche Determinante zu definieren. In unserem Fall ist das die Determinante der Matrix der inneren Produkte ($dx^i \cdot dx^j$):

$$< dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \cdot \, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} > := \begin{vmatrix} (dx^{i_1} \cdot dx^{j_1}) & \cdots & (dx^{i_1} \cdot dx^{j_p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (dx^{i_p} \cdot dx^{j_1}) & \cdots & (dx^{i_p} \cdot dx^{j_p}) \end{vmatrix} \,. \tag{4.20}$$

Das Skalarprodukt $<\cdot>$ der äußeren Algebra $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ wurde somit direkt vom inneren Produkt ($\cdot$) des Grundvektorraumes $\mathbb{V}^n$ abgeleitet. Mit seiner Hilfe läßt sich der Hodge Operator auf zweierlei Weise definieren, $\boldsymbol{\alpha}$ ist eine p–Form:

$$\boldsymbol{\beta} \wedge *\boldsymbol{\alpha} \;=\; <\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}> \quad dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{4.21.1}$$

$$\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} \;=\; <\boldsymbol{\beta} \cdot *\boldsymbol{\alpha}> \; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \,. \tag{4.21.2}$$

In der Definition (4.21.1) ist $\boldsymbol{\beta}$ eine p–Form, in der alternativen Definition (4.21.2) dagegen eine $n-p$–Form. Auf der rechten Seite tritt jeweils mit $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ die Volumenform auf, die aus allen n Basislementen dx^i besteht. Beide Definitionen führen zu in sich konsistenten Resultaten, die allerdings in der zweiten Schreibweise (4.21.2) besser mit unseren Ergebnissen in Tensorform zu vergleichen sind. Beim dualen Feldstärketensor (3.20) beispielsweise würde uns die Verwendung von (4.21.1) mit zusätzlichen Vorzeichen konfrontieren, deren Diskussion und anschließende Elimination sich durch die Verwendung der zweiten Form (4.21.2) vermeiden läßt. Unabhängig davon, welche der beiden Definitionen verwendet wird, gehorcht der Hodge Operator diesen Rechenregeln:

$$*(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = *\boldsymbol{\alpha} + *\boldsymbol{\beta} \tag{4.22.1}$$

$$*(a\,\boldsymbol{\alpha}) = a\,*\boldsymbol{\alpha} \tag{4.22.2}$$

$$*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = *\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} \tag{4.22.3}$$

$$**\boldsymbol{\alpha} = (-1)^{p(n-p)+N_I}\,\boldsymbol{\alpha} \tag{4.22.4}$$

Wir kommentieren diese Regeln mit folgenden Bemerkungen:

- *Gleichungen (4.22.1)-(4.22.2):*
  Die Linearität des Hodge Operators ist eine direkte Folge der Definition (4.21) sowie der Linearität des äußeren Produktes $\wedge$ und des inneren Produktes $<\cdot>$.

- *Gleichung (4.22.3):*
  Diese Beziehung gilt nicht für beliebige Formen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$, sondern nur für solche, bei denen der Ausdruck $*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$ sich zur Volumenform $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ ergänzt. Aufgrund der Linearität (4.22.1) und (4.22.2) genügt die Betrachtung von Monomen, die in der linken und der rechten Seite der Gleichung (4.22.3) lediglich ihre Vorfaktoren austauschen.

- *Gleichung (4.22.4):*
  Die zweifache Anwendung des Hodge Operators erzeugt ein Abbild, das wieder im ursprünglichen Raum $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ der Ausgangsform liegt, sich aber von $\boldsymbol{\alpha}$ selbst durch ein Vorzeichen unterscheiden kann. Dieses Vorzeichen hängt vom Grad p der Differentialform, der Dimension n des Grundvektorraumes und der Anzahl N_I der imaginären Vektoren der Metrik ab. Die Diskussion der Gleichung (4.22.4) führen wir in Anhang D.2.

Die Bestimmung von $*\boldsymbol{\alpha}$ kann nach folgendem Rezept geschehen:

- Zunächst muß ein geeigneter Multiplikationspartner $\boldsymbol{\beta}$ gewählt werden, wofür sich die zu $\boldsymbol{\alpha}$ komplementäre Basisform $\boldsymbol{\beta} = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{n-p}}$ anbietet.

- Wegen der Linearität des Hodge Operators genügt es, die Hodge- Duale der Basiselemente von $\boldsymbol{\alpha}$ zu berechnen. Diese dualen Formen ergänzen die Basiselemente jeweils zur vollständigen Volumenform.

– Die Anzahl der Permutationen, welche die dx^i auf der linken Seite von Gleichung (4.21) in die Reihenfolge $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ bringen, bestimmt die Anzahl von Minuszeichen, mit denen das Ergebnis multipliziert werden muß.

– Die Gramsche Determinante auf der Rechten Seite von Gleichung (4.21) ist die Determinante einer aus Einsen bestehenden Diagonalmatrix, wenn die dx^i orthonormal sind. Existieren wie im Fall der Minkowskimetrik imaginäre Vektoren, haben einige Diagonalelemente den Wert -1 und steuern über die Gramsche Determinante weitere Minuszeichen bei.

Wir möchten an dieser Stelle zwei Beispiele präsentieren, in denen die Wirkungsweise des Hodge Operators deutlich wird. Zunächst betrachten wir die Feldform $\boldsymbol{\beta}$ (vgl. (4.5)), deren duale Form $*\boldsymbol{\beta}$ wir berechnen wollen:

$$\boldsymbol{\beta} = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu\,. \tag{4.23}$$

Nach Einsetzen der Komponenten aus (3.19) lautet $\boldsymbol{\beta}$ explizit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= E^1\, dx^0 \wedge dx^1 + E^2\, dx^0 \wedge dx^2 + E^3\, dx^0 \wedge dx^3 \\ &- B^3\, dx^1 \wedge dx^2 + B^2\, dx^1 \wedge dx^3 - B^1\, dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}\,. \tag{4.24}$$

Wir bestimmen nun die Hodge- Duale der einzelnen Basisformen:

$$\begin{array}{ll} *\,(dx^0 \wedge dx^1) = \, dx^2 \wedge dx^3 & *\,(dx^1 \wedge dx^2) = -\, dx^0 \wedge dx^3 \\ *\,(dx^0 \wedge dx^2) = -\, dx^1 \wedge dx^3 & *\,(dx^1 \wedge dx^3) = \, dx^0 \wedge dx^2 \\ *\,(dx^0 \wedge dx^3) = \, dx^1 \wedge dx^2 & *\,(dx^2 \wedge dx^3) = -\, dx^0 \wedge dx^1 \end{array}\,. \tag{4.25}$$

Da der Hodge Operator linear ist, genügt die Kenntnis der dualen Basis (4.25), um $*\boldsymbol{\beta}$ angeben zu können:

$$\begin{aligned} *\boldsymbol{\beta} &= B^1\, dx^0 \wedge dx^1 + B^2\, dx^0 \wedge dx^2 + B^3\, dx^0 \wedge dx^3 \\ &+ E^3\, dx^1 \wedge dx^2 - E^2\, dx^1 \wedge dx^3 + E^1\, dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}\,. \tag{4.26}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von $*\boldsymbol{\beta}$ mit der Matrix $(*F^{\mu\nu})$ aus (3.20), so stimmen sie überein, wenn die Indizes von $(*F^{\mu\nu})$ mit Hilfe der Metrik $g_{\mu\nu}$ heruntergezogen werden.

Ein weiteres naheliegendes Beispiel ist das Kreuzprodukt der elementaren Vektorrechnung im Raum $\mathbb{V}^3$. Da die Metrik dieses Raumes euklidisch ist, fallen die Vorzeichen weg, die durch imaginäre Basisvektoren generiert werden. Betrachten wir zwei Vektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$:

$$\underline{A} \wedge \underline{B} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^3 + \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} dx^2 \wedge dx^3 \,. \tag{4.27}$$

In Gleichung (4.27) treten zwar die Koeffizienten des Kreuzproduktes von $\underline{A}$ und $\underline{B}$ auf, das Resultat liegt aber als 2–Form nicht im Vektorraum $\Lambda^1[\mathbb{V}^3]$ der Faktoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$. Der Hodge Operator ermöglicht jedoch die Konstruktion eines Ersatzvektors für diese 2–Form, wofür wir als ersten Schritt die dualen Basisformen bilden:

$$\begin{aligned} *\,(dx^1 \wedge dx^2) &= dx^3 \\ *\,(dx^1 \wedge dx^3) &= -dx^2 \\ *\,(dx^2 \wedge dx^3) &= dx^1 \end{aligned} \quad . \tag{4.28}$$

Mit diesen Basisformen kann das Duale des Schiefproduktes (4.27) berechnet werden:

$$*\,(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} dx^1 - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} dx^2 + \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} dx^3 \,. \tag{4.29}$$

Dieses ist die bekannte Formel des Kreuzproduktes von $\underline{A}$ und $\underline{B}$, das wir nun mit Hilfe des Schiefproduktes $\wedge$ schreiben können:

$$\underline{A} \times \underline{B} = *\,(\underline{A} \wedge \underline{B}) \ . \tag{4.30}$$

4.4 Die BAC–CAB Regel

Hier ist eine gute Gelegenheit, die Übertragung einer häufig verwendeten Rechenregel der Vektoralgebra in den Kalkül der Differentialformen zu untersuchen. Es handelt sich dabei um den Graßmannschen Entwicklungssatz, der die Umformung des zweifachen Kreuzproduktes beschreibt:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) \;=\; \underline{B}\,(\,\underline{A} \cdot \underline{C}\,) \;-\; \underline{C}\,(\,\underline{A} \cdot \underline{B}\,)\,. \tag{4.31}$$

Der besseren Einprägsamkeit wegen trägt (4.31) auch den Namen „BAC–CAB“ Regel. Für die kommende Betrachtung benötigen wir vier Differentialformen der folgenden Gestalt:

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\alpha} \;=\; \boldsymbol{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\alpha}^p \;\ldots\ldots\ldots & p\text{–Form} \\
\boldsymbol{\gamma} \;=\; \boldsymbol{\gamma}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\gamma}^p \;\ldots\ldots\ldots & p\text{–Form} \\
\boldsymbol{\beta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\text{–Form} \\
\boldsymbol{\lambda} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 1\text{–Form}
\end{array}
$$

Die obenstehenden Multivektoren dürfen keine n–Formen sein, weswegen die zusätzliche Einschränkung $p \leq n-1$ zu beachten ist. Aus diesen Differentialformen bilden wir eine n–Form $\boldsymbol{\Lambda}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} \wedge \boldsymbol{\alpha} \wedge *(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})\,. \tag{4.32}$$

Wir werden nun die Definitionsgleichung (4.21.2) für den Hodge Operator auf die Differentialform $\boldsymbol{\Lambda}$ anwenden. Je nachdem an welcher Stelle die Unterteilung in zwei Faktoren vorgenommen wird, ergeben sich hierbei verschiedene Darstellungen. Den Graßmannschen Entwicklungssatz erhalten wir schließlich aus dem Vergleich zweier solcher Zerlegungen. Um die Übersichtlichkeit der Ausdrücke zu erhöhen, führen wir für die Volumenform ein eigenes Symbol ein:

$$\mathbf{vol} \;=\; dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\,. \tag{4.33}$$

Die erste Zerlegung geschieht nach der 1–Form $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = <\boldsymbol{\lambda} \cdot *(\boldsymbol{\alpha} \wedge *(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma}))>\, \mathbf{vol}\,. \tag{4.34}$$

Die zweite Zerlegung erfolgt nach dem Term $\boldsymbol{\lambda} \wedge \boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = <\boldsymbol{\lambda} \wedge \boldsymbol{\alpha} \cdot **(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})>\, \mathbf{vol}\,. \tag{4.35}$$

In diesem Fall läßt sich das Skalaprodukt als Gramsche Determinante auswerten:

$$\boldsymbol{\Lambda} = (-1)^{(n-1)(p+1)+N_I} \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \\ (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \end{vmatrix} \mathbf{vol}\,. \tag{4.36}$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus der Formel (4.22.4) für das Quadrat des Hodge Operators angewandt auf eine $(p+1)$–Form

$$(-1)^{(p+1)(n-p-1)+N_I} = (-1)^{(p+1)(n-1)-(p+1)p+N_I} = (-1)^{(n-1)(p+1)+N_I}\,, \tag{4.37}$$

denn der Ausdruck $(p+1)p$ des mittleren Termes ist immer geradzahlig. Im nächsten Schritt vergleichen wir (4.34) mit (4.36) und ziehen aus der ersten Zeile der Gramschen Determinante formal den Faktor $\boldsymbol{\lambda}$ heraus:

$$
\begin{aligned}
&< \boldsymbol{\lambda} \cdot *(\boldsymbol{\alpha} \wedge *(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})) > = \cdots \\
&\cdots = (-1)^{(n-1)(p+1)+N_I} \left(\boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma}^1 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}^p \\ (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \end{vmatrix} \right). \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

Die korrekte aber schlecht hinzuschreibende Version dieses Schrittes besteht in der Entwicklung der Gramschen Determinante (4.36) nach der ersten Zeile und anschließender Zusammenfassung der einzelnen Skalarprodukte $(\boldsymbol{\lambda} \cdot \ldots)$ durch Ausklammern von $\boldsymbol{\lambda}$. Jetzt kann die Entwicklung nach der ersten Zeile formal rückgängig gemacht werden, damit man statt der unübersichtlichen Linearkombination der $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\gamma}^i$ wieder einen kompakten Determinantenausdruck (4.38) erhält. Da die Skalarprodukte $< \cdot >$ und $(\cdot)$ für 1–Formen identisch sind und wir außerdem $\boldsymbol{\lambda}$ als beliebig annehmen, kann die Gleichung (4.38) nur durch das Gleichsetzen der rechten Seiten der Skalarprodukte erfüllt werden:

$$
*(\boldsymbol{\alpha} \wedge *(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})) = (-1)^{(n-1)(p+1)+N_I} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma}^1 & \cdots & \boldsymbol{\gamma}^p \\ (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^1 \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}^p \cdot \boldsymbol{\gamma}^p) \end{vmatrix}. \qquad (4.39)
$$

Dieses ist die Verallgemeinerung der BAC–CAB Regel für Differentialformen.

Wir betrachten nun den Spezialfall $p = 1$ in einem euklidischen Grundvektorraum, in dem mit $N_I = 0$ keine imaginären Vektoren zu berücksichtigen sind:

$$
*(\boldsymbol{\alpha} \wedge *(\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\gamma})) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) & (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \end{vmatrix} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}). \qquad (4.40)
$$

Diese Gleichung ist die zur BAC–CAB Regel äquivalente Beziehung für 1–Formen, welche gemäß

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &\Leftrightarrow \underline{A} \\
\boldsymbol{\beta} &\Leftrightarrow \underline{B} \\
\boldsymbol{\gamma} &\Leftrightarrow \underline{C}
\end{aligned}
$$

die Vektoren der BAC–CAB Regel ersetzen. Da wir aus dem letzten Abschnitt bereits wissen, daß sich das Kreuzprodukt des 3–dimensionalen euklidischen Vektorraumes mit Hilfe des Schiefproduktes $\wedge$ und anschließender Anwendung des Hodge Operators darstellen läßt, kommt der Ausdruck auf der linken Seite von (4.40) als Umsetzung des zweifachen Kreuzproduktes nicht unerwartet.

4.5 Die äußere Ableitung

Als Einstieg in die Theorie der Differentialformen haben wir im letzten Kapitel deren Algebra vorgestellt. In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Analysis, als deren zentrales Element wir zunächst den Operator d der äußeren Ableitung einführen. Dieser Operator besitzt die folgenden Eigenschaften:

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}_1 + \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}_2 \tag{4.41.1}$$

$$\mathsf{d}(a\,\boldsymbol{\omega}) = a\,\mathsf{d}\boldsymbol{\omega} \tag{4.41.2}$$

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2) = \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2 \;+\; (-1)^p\,\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}_2 \tag{4.41.3}$$

$$\mathsf{d}a(x^1 \cdots x^n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^i}\,dx^i\,. \tag{4.41.4}$$

Die Differentialformen $\boldsymbol{\omega}_1$ und $\boldsymbol{\omega}_2$ sind vom Grad p bzw. q, der Faktor a ist eine Konstante und $a(x^1 \cdots x^n)$ ist eine Funktion von Koordinaten im Vektorraum $\mathbb{V}^n$. Wir kommentieren die Gleichungen (4.41) mit den nachfolgenden Anmerkungen:

- *Gleichungen (4.41.1)-(4.41.2):*
  Durch diese Eigenschaften wird d wie die gewöhnliche Differentiation zu einem linearen Operator.
- *Gleichung (4.41.3):*
  Ebenfalls nachvollziehbar ist das Aufstellen einer auf das Schiefprodukt bezogenen Produktregel für d. Der Faktor $(-1)^p$ ergibt sich aus dem „Durchtauschen" der neu entstehenden Differentiale durch die Form $\boldsymbol{\omega}_1$.
- *Gleichung (4.41.4):*
  Hier wird festgelegt, daß d auf eine Koordinatenfunktion $a(x^1 \cdots x^n)$ wie ein totales Differential wirkt.

Da wir die Diskussion der Differentialformen im Rahmen der Elektrodynamik und der Speziellen Relativitätstheorie führen, können wir uns im Grundvektorraum $\mathbb{V}^n$

auf Parallelkoordinatensysteme beschränken. In diesen Koordinatensystemen sind die Koordinatenlinien Systeme paralleler Geraden, in deren Verlauf die Basisvektoren unverändert bleiben. Aus diesem Grund liefern die von den Basisvektoren abgeleiteten Basisformen des $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$ keinen Beitrag zur äußeren Ableitung:

$$\mathsf{d}\left(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\right)=0\,. \tag{4.42}$$

Damit lautet die äußere Ableitung einer Differentialform $\boldsymbol{\omega}=\omega_{k_1\cdots k_p}\,dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_p}$:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}\,\omega_{k_1\cdots k_p}\,dx^i\wedge dx^{k_1}\wedge\cdots\wedge dx^{k_p}\,. \tag{4.43}$$

Die Gleichung (4.43) zeigt, daß d eine p–Form in eine $p+1$–Form überführt. Als Konsequenz verschwindet die äußere Ableitung der Volumenform $\boldsymbol{\omega}^{(n)}$:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(n)}=0\,. \tag{4.44}$$

4.6 Das Lemma von Poincaré und dessen Umkehrung

Eine besondere Eigenschaft des Operators d ist das „Lemma von Poincaré“, demzufolge die zweifache äußere Ableitung einer Differentialform verschwindet:

$$\mathsf{dd}\boldsymbol{\omega}=0\,. \tag{4.45}$$

Den Beweis dieses Lemmas, der auf der Vertauschbarkeit der zweifachen partiellen Ableitung beruht, skizzieren wir in Anhang D.3. Interessanterweise ist auch der Umkehrschluß unter bestimmten Bedingungen korrekt:

Verschwindet in einem einfach zusammenhängenden, sternförmigen Gebiet die äußere Ableitung einer Differentialform $\boldsymbol{\omega}$, dann kann diese selbst als das äußere Differential einer Form $\boldsymbol{\alpha}$ aufgefaßt werden:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}=0\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{\omega}=\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{4.46}$$

Dem Lemma von Poincaré zufolge ist $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}=0$ in diesem Fall automatisch erfüllt wegen

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}=\mathsf{dd}\boldsymbol{\alpha}=0\,. \tag{4.47}$$

Der Beweis läßt sich konstruktiv durch explizite Angabe der Form $\boldsymbol{\alpha}$ führen, siehe beispielsweise [BF83]. Die Berechnung von $\boldsymbol{\alpha}(\underline{x})$ geschieht hierbei durch einen Integrationsprozeß, der alle Beiträge der Differentialform $\boldsymbol{\omega}(\underline{x})$ entlang einer Geraden vom Nullpunkt bis zum Punkt $\underline{x}$ aufsummiert. Hier ist die Sternförmigkeit des Definitionsgebietes von $\boldsymbol{\omega}$ um den Koordinatenursprung entscheidend, da das Integrationsgebiet von den jeweils betrachteten Punkten $\underline{x}$ in den Nullpunkt zusammengezogen wird:

$$\underline{x}(t) = t\,\underline{x}\,, \qquad 0 \leq t \leq 1\,. \tag{4.48}$$

Die Form $\boldsymbol{\alpha}$ erhält somit die Gestalt

$$\boldsymbol{\alpha}(\underline{x}) = \int_0^1 \boldsymbol{\omega}(t\,\underline{x}) = \int_0^1 \omega_{i_1\cdots i_p}(tx^1\cdots tx^n)\; d(tx^{i_1})\wedge\cdots\wedge d(tx^{i_p})\,. \tag{4.49}$$

Zur Auswertung des Integrals werden die einzelnen Differentiale zerlegt:

$$d(tx^i) = x^i\,dt + t\,dx^i\,. \tag{4.50}$$

Bei der Ausmultiplikation der Schiefprodukte fallen alle Terme weg, die dt mehrfach enthalten. Im Term $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$ kommt dt überhaupt nicht vor, wodurch dieser als zusätzliche Integrationskonstante im bestimmten Integral ebenfalls keinen Beitrag liefert. Es bleiben also die Anteile, welche dt einmal enthalten, und das Integral kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\alpha}(\underline{x}) = -\int_0^1 t^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx^1\cdots tx^n)\,dt\left[\sum_{k=1}^{p}(-1)^k x^{i_k}(\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^{i_k}\right]. \tag{4.51}$$

In den Summentermen innerhalb der eckigen Klammer erscheint der Ausdruck dt jeweils in der Position des Differentials dx^{i_k}, wird nach links durchgetauscht und erzeugt dabei den Faktor $(-1)^k$. Der Zusatz $\backslash dx^{i_k}$ besagt, daß der betreffende Term die Basisform dx^{i_k} nicht mehr enthält, wodurch der Inhalt der Klammer zu einer $p-1$–Form wird. Um in den folgenden Rechnungen die Übersicht nicht zu verlieren, führen wir eine abkürzende Operatorschreibweise für das Integral (4.49) ein:

$$\boldsymbol{\alpha}(\underline{x}) = \mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] := \int_0^1 \boldsymbol{\omega}(t\,\underline{x})\,. \tag{4.52}$$

In Anhang D.4 wird gezeigt, daß die hier eingeführte Integration und die äußere Ableitung in folgendem Zusammenhang stehen:

$$\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] + \mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \boldsymbol{\omega}(\underline{x})\,. \tag{4.53}$$

In unserer Situation fällt der erste Summand weg, da laut Voraussetzung (4.46) die äußere Ableitung von $\boldsymbol{\omega}$ verschwindet. Der so vereinfachten Gleichung läßt sich entnehmen, daß die in (4.51) vorgestellte Version von $\boldsymbol{\alpha}$ tatsächlich die Ausgangsform $\boldsymbol{\omega}$ durch äußere Differentiation generiert:

$$\boldsymbol{\omega}(\underline{x}) = \mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}(\underline{x})\,. \tag{4.54}$$

Die Form $\boldsymbol{\alpha}$ hat für $\boldsymbol{\omega}$ die Bedeutung einer Stammfunktion, deren Existenz durch die Integrabilitätsbedingung $\mathsf{d}\,\boldsymbol{\omega} = 0$ garantiert wird. Wie die Stammfunktion der elementaren Analysis ist $\boldsymbol{\alpha}$ nicht eindeutig und kann durch eine Form $\boldsymbol{\eta}$ ergänzt werden, deren äußere Ableitung verschwindet. Die so gebildete Form $\boldsymbol{\alpha}'$ ist zu $\boldsymbol{\alpha}$ äquivalent:

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}\,, \qquad \mathsf{d}\boldsymbol{\eta} = 0\,. \tag{4.55}$$

Die Form $\boldsymbol{\eta}$ ist mit der Integrationskonstanten elementarer Integrale vergleichbar. Einen dreidimensionalen Spezialfall dieser Situation hatten wir schon im Abschnitt 2.2 über die Lorentzeichung kennengelernt, wo das Hinzufügen eines rotationsfreien Gradientenfeldes unter dem Begriff „Eichtransformation“ behandelt wurde. Es ergeben sich $n-1$ nichttriviale Situationen bei der Berechnung von $\boldsymbol{\alpha}$, in denen die Stufe p im Bereich

$$0 \leq p \leq n-2 \tag{4.56}$$

liegt. Im Fall $p = n-1$ verschwindet $\mathsf{d}\,\mathsf{d}\,\boldsymbol{\alpha}$ bereits, weil die Stufe durch die äußeren Differentiationen die Dimension des Grundvektorraumes $\mathbb{V}^n$ überschreitet (vgl. (D.14)), und $\boldsymbol{\alpha}$ ohne zusätzliche Forderung an $\boldsymbol{\omega}$ berechnet werden kann.

4.7 Der allgemeine Satz von Stokes

Die Interpretation von $\boldsymbol{\omega}$ als Stammfunktion von $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ ist ein willkommener Anlaß für den Hinweis, daß neben der Differentialrechnung für Differentialformen auch eine Integralrechnung existiert. Differentialformen bilden automatisch geeignete Integranden für Gebietsintegrale im Raum $\mathbb{V}^n$, deren Eigenschaften durch ein System von Aussagen bezüglich des Wechsels von Integrationsvariablen, der möglichen Topologie der

Unterräume usw. festgelegt werden. Das zentrale Resultat dieser Theorie ist ein Integralsatz, der eine Form $\boldsymbol{\omega}$ mit ihrer äußeren Ableitung $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ in Verbindung bringt:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\omega} = \int_{V} \mathsf{d}\boldsymbol{\omega} \,. \tag{4.57}$$

Das Integrationsgebiet ∂V auf der linken Seite von (4.57) ist der Rand des Integrationsgebietes V rechts. Dieser Satz heißt der „Allgemeine Satz von Stokes", weil er eine direkte Erweiterung des in drei Dimensionen bekannten Satzes von Stokes ist. Er verallgemeinert diesen für beliebige Dimensionen und Stufen und umfaßt somit auch den Integralsatz von Gauß.

Wie schon anfangs angedeutet ist dieser fundamentale Satz an sich zwar sehr interessant, spielt aber in unserer Abhandlung nur eine untergeordnete Rolle. Wir haben ihn erwähnt, da wir im nächsten Abschnitt auf ihn zurückgreifen, und um die Theorie der Cartanschen Differentialformen einigermaßen vollständig darzustellen. Um nicht noch weiter vom Thema dieser Studie abzuschweifen, verweisen wir für den Beweis dieses Satzes auf die einschlägige Literatur [Fl63], [BF83] und betrachten stattdessen in Abschnitt 4.9 einige Beispiele.

4.8 Die Koableitung

Arbeiten aus dem Gebiet der Differentialformen verwenden häufig einen zusätzlichen Differentialoperator δ mit dem Namen „Koableitung". Ausgangspunkt für dessen Definition ist die Einführung eines weiteren inneren Produktes $<\,|\,>$ im Raum $\Lambda^p[\mathbb{V}^n]$, das auf dem Skalarprodukt $<\cdot>$ aus Abschnitt 4.3 aufbaut und zusätzlich das Integral über alle Koordinaten enthält:

$$<\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\beta}> := \int_{V} \boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta} \,. \tag{4.58}$$

Beide Formen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ sind p–Formen, und daher ergänzen sich die nicht verschwindenden Anteile des Integranden zur Volumenform. Die Idee ist nun, die Koableitung δ als den zu d adjungierten Operator bezüglich dieses Skalarproduktes aufzufassen:

$$<\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\beta}> \;=\; <\boldsymbol{\alpha}\,|\,\delta\boldsymbol{\beta}> \;. \tag{4.59}$$

Implizit werden hierbei sinnvolle Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ wie beispielweise Quadratintegrabilität vorausgesetzt, die der jeweiligen Situation entsprechen. Insbesondere ist $\boldsymbol{\beta}$ eine $p+1$–Form, wenn es sich bei $\boldsymbol{\alpha}$ um eine p–Form handelt.

Wir konstruieren nun mit Hilfe von Gleichung (4.59) eine explizite Darstellung von δ und orientieren uns hierbei an der Herleitung des adjungierten Impulsoperators in der Quantenmechanik [Mer70], [Mes85]. Die dort vorgenommene Auswertung eines elementaren Integrals durch partielle Integration wird in unserem Fall durch den Satz von Stokes und die Forderung nach geeigneten Randbedingungen ersetzt. Von den Differentialformen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ verlangen wir, daß das Produkt $\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}$ am Rand ∂V des Integrationsgebietes (z.B. im Unendlichen) genügend stark verschwindet, damit wir schreiben können:

$$0 := \int\limits_{\partial V} \boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta} = \int\limits_{V} \mathsf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta})\,. \tag{4.60}$$

Wendet man die Produktregel (4.41.3) auf den Integranden an, ergibt sich

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}) \;=\; \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta} \;+\; (-1)^p\, \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}\,. \tag{4.61}$$

Der zweite Term wird um das Quadrat des Hodge Operators erweitert, wodurch ein Faktor $(-1)^{p(n-p)+N_I}$ entsteht, vergleiche Ausdruck (4.22.4) für die $(n-p)$–Form $\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}$. Dieses Vorzeichen muß kompensiert werden, und zusammen mit dem schon vorhandenen Faktor $(-1)^p$ ergibt sich

$$(-1)^p \cdot (-1)^{p(n-p)+N_I} = (-1)^{pn-p(p-1)+N_I} = (-1)^{pn+N_I}\,, \tag{4.62}$$

weil der Anteil $p(p-1)$ geradzahlig ist und somit wegfällt. Wir können also schreiben:

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}) \;=\; \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta} \;+\; (-1)^{pn+N_I}\, \boldsymbol{\alpha} \wedge **\,\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}\,. \tag{4.63}$$

Schließlich beziehen wir das Vorzeichen auf den Grad q der Form $\boldsymbol{\beta}$ mit $q = p+1$, wodurch sich das Vorzeichen wie folgt transformiert:

$$(-1)^{pn+N_I} = (-1)^{n(q-1)+N_I} = (-1)^{n(q+1)+N_I}\,. \tag{4.64}$$

Im letzten Schritt wurde ein Faktor $(-1)^{2n} = 1$ hinzugefügt. Außerdem ergänzen wir den letzten Term von Gleichung (4.63) noch um $-(-1)$ und erhalten als endgültiges Resultat

$$\mathsf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}) \;=\; \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta} \;-\; (-1)^{n(q+1)+1+N_I}\, \boldsymbol{\alpha} \wedge **\,\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}\,. \tag{4.65}$$

Nun interpretieren wir alle Terme als Skalarprodukte, wodurch Gleichung (4.60) die Form

$$0 := \int_V \mathsf{d}(\boldsymbol{\alpha} \wedge *\boldsymbol{\beta}) \;=\; <\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\beta}> - \;(-1)^{n(q+1)+1+N_I} <\boldsymbol{\alpha}\,|{*}\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}> \tag{4.66}$$

erhält. Im direkten Vergleich mit (4.59) läßt sich dieser Ausdruck zur Definition der Koableitung δ verwenden:

$$0 \;:=\; <\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\beta}> - <\boldsymbol{\alpha}\,|\,\delta\boldsymbol{\beta}> \tag{4.67.1}$$

$$\delta \;:=\; (-1)^{n(q+1)+1+N_I}\, {*}\mathsf{d}{*}\,. \tag{4.67.2}$$

Die Darstellung (4.67.2) verknüpft die Koableitung δ über den Hodge Operator mit der Metrik $(\,\cdot\,)$ des Grundvektorraumes. Sie ist ohne weitere Einschränkungen zur Vereinfachung und kompakteren Schreibweise von Ausdrücken mit $*$ und d verwendbar. Wenn δ allerdings als adjungierte äußere Ableitung interpretiert werden soll, müssen die Voraussetzungen an die Komponentenfunktionen, die zum Verschwinden des „Oberflächenterms“ in (4.60) führen, sorgfältig geprüft werden.

4.9 Beispiel: Der dreidimensionale Raum $\mathbb{V}^3$

Die Bedeutung der äußeren Ableitung ist im dreidimensionalen euklidischen Raum besonders leicht nachzuvollziehen, weil hier die Ergebnisse direkt mit den Resultaten der elementaren Vektoranalysis verglichen werden können. Zu diesem Zweck wenden wir d auf drei Differentialformen verschiedener Stufe an:

$$\boldsymbol{\omega}^{(0)} = a(\underline{x}) \tag{4.68.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = b_1(\underline{x})\, dx^1 + b_2(\underline{x})\, dx^2 + b_3(\underline{x})\, dx^3 \tag{4.68.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = c_1(\underline{x})\; dx^2 \wedge dx^3 + c_2(\underline{x})\; dx^3 \wedge dx^1 + c_3(\underline{x})\; dx^1 \wedge dx^2 \tag{4.68.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(3)} = d(\underline{x})\; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3\,. \tag{4.68.4}$$

$\boldsymbol{\omega}^{(0)}$ ist eine skalare Funktion des Ortes, $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ ist ein Vektorfeld dargestellt mit kovarianten Komponenten, in $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ sind die Vorzeichen und Koeffizienten so gewählt, daß die äußere Ableitung leicht zu interpretieren sein wird, und $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ ist die Volumenform mit einer Koeffizientenfunktion $d(\underline{x})$. Wir beginnen mit der 0–Form:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(0)} = \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 + \frac{\partial a}{\partial x^2}\, dx^2 + \frac{\partial a}{\partial x^3}\, dx^3\,. \tag{4.69}$$

Offensichtlich handelt es sich bei dem so entstandenen Vektorfeld (4.69) um den Gradienten der Funktion $a(\underline{x})$. Die äußere Ableitung der 1–Form liefert ebenfalls einen bekannten Differentialoperator:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} &= \left[\frac{\partial b_1}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial b_1}{\partial x^3}\,dx^3\right]\wedge dx^1 + \left[\frac{\partial b_2}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial b_2}{\partial x^3}\,dx^3\right]\wedge dx^2 + \\
&\quad \left[\frac{\partial b_3}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial b_3}{\partial x^2}\,dx^2\right]\wedge dx^3 \\
&= \left[\frac{\partial b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^3}\right] dx^2\wedge dx^3 + \left[\frac{\partial b_1}{\partial x^3} - \frac{\partial b_3}{\partial x^1}\right] dx^3\wedge dx^1 + \\
&\quad \left[\frac{\partial b_2}{\partial x^1} - \frac{\partial b_1}{\partial x^2}\right] dx^1\wedge dx^2\,. \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

Die Komponenten aus (4.70) entsprechen der Rotation des Vektorfeldes $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$. Den aus der dreidimensionalen Vektoranalysis bekannten Ersatzvektor für die Rotation erhalten wir mit Hilfe des Hodge Operators

$$*\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \left[\frac{\partial b_3}{\partial x^2} - \frac{\partial b_2}{\partial x^3}\right]dx^1 + \left[\frac{\partial b_1}{\partial x^3} - \frac{\partial b_3}{\partial x^1}\right]dx^2 + \left[\frac{\partial b_2}{\partial x^1} - \frac{\partial b_1}{\partial x^2}\right]dx^3\,, \qquad (4.71)$$

was sich mit Hilfe der dualen Basisformen (4.28) leicht verifizieren läßt. Nach diesen Ergebnissen überrascht es nicht, daß die aus der äußeren Ableitung der Form $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ entstehende 3–Form einen Divergenzterm als Koeffizienten besitzt:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \left[\frac{\partial c_1}{\partial x^1} + \frac{\partial c_2}{\partial x^2} + \frac{\partial c_3}{\partial x^3}\right] dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\,. \qquad (4.72)$$

Auch aus der Koableitung δ lassen sich die Operatoren der Vektoranalysis nachbilden. Wenden wir z.B. δ auf $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ an, entsteht ebenfalls ein Divergenzausdruck:

$$\begin{aligned}
*\boldsymbol{\omega}^{(1)} &= b_1\,dx^2\wedge dx^3 + b_2\,dx^3\wedge dx^1 + b_3\,dx^1\wedge dx^2 && (4.73.1)\\
\mathsf{d}*\boldsymbol{\omega}^{(1)} &= \left[\frac{\partial b_1}{\partial x^1} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3}\right] dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 && (4.73.2)\\
\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} &= \left[\frac{\partial b_1}{\partial x^1} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3}\right]. && (4.73.3)
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen in (4.67) lautet mit $n = 3$, $p = 1$ und $N_I = 0$

$$(-1)^{n(p+1)+1+N_I} = -1\,, \qquad (4.74)$$

wodurch die Koableitung von $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ ein zusätzliches Minuszeichen erhält:

$$\delta\boldsymbol{\omega}^{(1)} = -\Big[\frac{\partial b_1}{\partial x^1} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3}\Big]\,. \tag{4.75}$$

Bei der Bildung von $\delta\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ erhalten wir den Ersatzvektor der Rotation eines Vektorfeldes mit den Komponenten c_i direkt:

$$*\boldsymbol{\omega}^{(2)} = c_1\,dx^1 + c_2\,dx^2 + c_3\,dx^3 \tag{4.76.1}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{d}*\boldsymbol{\omega}^{(2)} = {} & \Big[\frac{\partial c_3}{\partial x^2} - \frac{\partial c_2}{\partial x^3}\Big]\,dx^2\wedge dx^3 + \Big[\frac{\partial c_1}{\partial x^3} - \frac{\partial c_3}{\partial x^1}\Big]\,dx^3\wedge dx^1 + \\ & \Big[\frac{\partial c_2}{\partial x^1} - \frac{\partial c_1}{\partial x^2}\Big]\,dx^1\wedge dx^2\end{aligned} \tag{4.76.2}$$

$$*\mathsf{d}*\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \Big[\frac{\partial c_3}{\partial x^2} - \frac{\partial c_2}{\partial x^3}\Big]dx^1 + \Big[\frac{\partial c_1}{\partial x^3} - \frac{\partial c_3}{\partial x^1}\Big]dx^2 + \Big[\frac{\partial c_2}{\partial x^1} - \frac{\partial c_1}{\partial x^2}\Big]dx^3\,. \tag{4.76.3}$$

Der Schritt von (4.76.1) nach (4.76.2) kann direkt aus (4.70) abgelesen werden. Nach der Festlegung des Vorzeichens der Koableitung

$$(-1)^{n(p+1)+1+N_I} = 1 \tag{4.77}$$

mit $n = 3$, $p = 2$ und $N_I = 0$ erhalten wir den zu (4.71) äquivalenten Ausdruck

$$\delta\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \Big[\frac{\partial c_3}{\partial x^2} - \frac{\partial c_2}{\partial x^3}\Big]dx^1 + \Big[\frac{\partial c_1}{\partial x^3} - \frac{\partial c_3}{\partial x^1}\Big]dx^2 + \Big[\frac{\partial c_2}{\partial x^1} - \frac{\partial c_1}{\partial x^2}\Big]dx^3\,. \tag{4.78}$$

Auf ähnliche Weise läßt sich über die Koableitung δ der Gradient des Koeffizienten der Form $\boldsymbol{\omega}^{(3)}$ erzeugen. Dieser hat allerdings als 2–Form, welche aus einer 3–Form entstanden ist, ein für einen Gradientenvektor ungewohntes Erscheinungsbild. Die Rechnung selbst vermittelt keine weiteren Einsichten in die Verknüpfung der Vektoranalysis mit Differentialformen und kann bei Interesse vom Leser leicht selbst nachvollzogen werden.

Während die äußere Ableitung den Grad um Eins erhöht, vermindert die Koableitung diesen um Eins. Auf diese Weise kann man die drei Operatoren der Vektoranalysis jeweils auf zwei äquivalente Weisen darstellen, die wir in der folgenden Tabelle zusammengefaßt haben:

Operator	Ausgangs-form	Operation	Grad Resultat	Ausgangs-form	Operation	Grad Resultat
Gradient	$\boldsymbol{\omega}^{(0)}$	$\Rightarrow \mathsf{d} \Rightarrow$	$p = 1$	$\boldsymbol{\omega}^{(3)}$	$\Rightarrow \delta \Rightarrow$	$p = 2$
Rotation	$\boldsymbol{\omega}^{(1)}$	$\Rightarrow \mathsf{d} \Rightarrow$	$p = 2$	$\boldsymbol{\omega}^{(2)}$	$\Rightarrow \delta \Rightarrow$	$p = 1$
Divergenz	$\boldsymbol{\omega}^{(2)}$	$\Rightarrow \mathsf{d} \Rightarrow$	$p = 3$	$\boldsymbol{\omega}^{(1)}$	$\Rightarrow \delta \Rightarrow$	$p = 0$

Als nächstes betrachten wir das Lemma von Poincaré und seine Umkehrung im Raum $\mathbb{V}^3$. Gemäß der Ungleichung (4.56) ergeben sich die beiden nichttrivialen Fälle $p = 0$ und $p = 1$:

$$\mathsf{d}\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{grad}\omega^{(0)} = 0 \tag{4.79.1}$$

$$\mathsf{d}\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{\omega}^{(1)} = 0\,. \tag{4.79.2}$$

Hierbei wird der Wechsel von der Differentialformennotation zu den Begriffen der elementaren Vektoranalysis in der Schreibweise $\omega^{(0)}$ (skalare Funktion) und $\underline{\omega}^{(1)}$ (Vektor) angedeutet. Die Gleichungen (4.79) sind die schon bekannten Integrabilitätsbedingungen (A.1.1) und (A.1.2). Aus diesen folgen dann die Aussagen der Umkehrung des Lemmas von Poincaré:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot}\underline{\omega}^{(1)} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\omega}^{(1)} = \operatorname{grad}\omega^{(0)} \tag{4.80.1}$$

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(2)} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \mathsf{d}\boldsymbol{\omega}^{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div}\underline{\omega}^{(2)} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\omega}^{(2)} = \operatorname{rot}\underline{\omega}^{(1)}\,. \tag{4.80.2}$$

Zum Abschluß wollen wir untersuchen, welche konventionellen Sätze der Vektoranalysis dem allgemeinen Satz von Stokes

$$\int\limits_{\partial V} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_{V} \mathsf{d}\boldsymbol{\omega} \tag{4.81}$$

entsprechen. In drei Dimensionen können abhängig von der Stufe von $\boldsymbol{\omega}$ drei verschiedene Fälle betrachtet werden:

– $\boldsymbol{\omega}$ *ist ein skalares Feld ($p = 0$):*

Das Integrationsgebiet V ist eine Kurve $C = \underline{x}(t)$ im Ortsraum mit dem Kurvenparameter $0 \leq t \leq 1$, deren Randgebiet ∂V aus den beiden Punkten $\underline{x}(0)$ und $\underline{x}(1)$ besteht. Die äußere Ableitung $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ ist der Gradient der skalaren Funktion $\boldsymbol{\omega} = \omega(\underline{x})$, wodurch sich der Satz von Stokes reduziert auf

$$\omega(\underline{x}(1)) - \omega(\underline{x}(0)) = \int\limits_C (\operatorname{grad}\omega \cdot d\underline{l}\,) \tag{4.82.1}$$

$$dl^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} dt\,, \quad 0 \leq t \leq 1 \;\text{ entlang } C\,. \tag{4.82.2}$$

Der herkömmliche Sprachgebrauch wäre: „Die Pfaffsche Form $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ ist exakt, wodurch man sie als totales Differential einer Funktion $\boldsymbol{\omega} = \omega(\underline{x})$ schreiben kann. Das Ergebnis des Kurvenintegrals hängt nur von den gewählten Endpunkten der Kurve ab und ist vom Kurvenverlauf unabhängig“.

– $\boldsymbol{\omega}$ *ist ein Vektorfeld ($p = 1$):*

Das Integrationsgebiet V ist eine Fläche $F = \underline{x}(u, v)$, die von der geschlossenen Kurve $C = \underline{x}(t)$ begrenzt ist. Die äußere Ableitung $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ ist die Rotation des Vektorfeldes $\boldsymbol{\omega} = \underline{\omega}(\underline{x})$, und der resultierende Integralsatz heißt auch in der Vektoranalysis „Satz von Stokes“:

$$\oint\limits_C (\,\underline{\omega} \cdot d\underline{l}\,) = \int\limits_F (\operatorname{rot}\underline{\omega} \cdot d\underline{f}\,) \tag{4.83.1}$$

$$df^i = \begin{vmatrix} \partial x^j/\partial u & \partial x^j/\partial v \\ \partial x^k/\partial u & \partial x^k/\partial v \end{vmatrix} du\,dv, \quad ijk = \begin{cases} 123 \\ 231 \\ 312 \end{cases} \text{entlang } F \tag{4.83.2}$$

$$dl^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} dt \quad \text{entlang } C\,. \tag{4.83.3}$$

In der elementaren Vektoranalysis hieße das: „Der Satz von Stokes besagt, daß das Flächenintegral über ein Vektorfeld $\underline{\omega}$ innerhalb eines von der Kurve C umschlossenen Gebietes F das Gleiche ergibt, wie das Kurvenintegral dieses Vektorfeldes entlang der Randkurve C. Der Wert des Integrals ist von der Form der Fläche innerhalb der Randkurve unabhängig“.

– $\boldsymbol{\omega}$ *ist eine 2–Form* ($p = 2$):

Das Integrationsgebiet ist ein von der Oberfläche $F = \underline{x}(s,t)$ umschlossenes Volumen $V = \underline{x}(u,v,w)$. Die äußere Ableitung $\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}$ ist die Divergenz des Vektorfeldes $*\boldsymbol{\omega} = \underline{\omega}(\underline{x})$. Diesmal ergibt der allgemeine Satz von Stokes den „Satz von Gauß“:

$$\oint_F (\,\underline{\omega} \cdot d\underline{f}\,) = \int_V \operatorname{div} \underline{\omega}\; dV \tag{4.84.1}$$

$$dV = \begin{vmatrix} \partial x^1/\partial u & \partial x^1/\partial v & \partial x^1/\partial w \\ \partial x^2/\partial u & \partial x^2/\partial v & \partial x^2/\partial w \\ \partial x^3/\partial u & \partial x^3/\partial v & \partial x^3/\partial w \end{vmatrix} du\, dv\, dw \quad \text{innerhalb } V \tag{4.84.2}$$

$$df^i = \begin{vmatrix} \partial x^j/\partial s & \partial x^j/\partial t \\ \partial x^k/\partial s & \partial x^k/\partial t \end{vmatrix} ds\, dt, \quad ijk = \begin{cases} 123 \\ 231 \\ 312 \end{cases} \text{entlang } F \tag{4.84.3}$$

Der herkömmliche Sprachgebrauch lautet hier: „Der Satz von Gauß besagt, daß das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes $\underline{\omega}$ innerhalb eines Gebietes V ersetzt werden kann durch das Oberflächenintegral über dieses Vektorfeld auf der Randfläche F“. Eine Wahlfreiheit bezüglich der Integration innerhalb von F existiert mangels zusätzlicher räumlicher Dimensionen nicht.

Alle hier vorgestellten Beispiele belegen, daß die äußere Ableitung d diverse Sätze und Operatoren der Vektoranalysis in einer vereinheitlichten Darstellung zu integrieren vermag. So sind die Differentialoperatoren grad, rot und div Erscheinungsformen von d in speziellen Situationen, siehe (4.69), (4.70) und (4.72). Diese Vereinheitlichungstendenz setzt sich in den Integrabilitätsbedingungen (4.79) fort, die das Lemma von Poicaré verkörpern sowie in den Aussagen von seiner Umkehrung (4.80). In der Mechanik und Elektrodynamik spielen die Integralsätze (4.82), (4.83) und (4.84) eine besondere Rolle. Auch diese erhalten im allgemeinen Satz von Stokes eine einheitliche Form.

Am Anfang dieses Kapitels hatten wir kritisiert, daß bisher keine mit grad, rot und div vergleichbaren Differentialoperatoren für den vierdimensionalen Minkowskiraum zur Verfügung standen. Die problemlos auf beliebige Dimensionen erweiterbare äußere Ableitung d verallgemeinert diese Operatoren und ist somit für die Formulierung der Maxwellschen Gleichungen das Mittel der Wahl.

5 Darstellung in Differentialformen

Mit den Cartanschen Differentialformen haben wir im letzten Kapitel ein vielversprechendes mathematisches Werkzeug vorgestellt, das uns zu einer einer indexfreien Version der Maxwellschen Gleichungen verhelfen kann. Nach der aufwendigen Einführung dieser Theorie ist es nun an der Zeit, die Methode der Differentialformen auf die Elektrodynamik anzuwenden und so von deren integrierten Symmetrien und Invarianzen zu profitieren. Auf diese Weise entstehen Gleichungen von strengem Tensorcharakter, welcher sich nicht nur auf die physikalischen Größen sondern auch auf die auf sie wirkenden Differentialoperatoren bezieht. Außerdem bekommen alle Objekte über die ihnen zugeordneten Linien-, Flächen- und Volumenelemente eine zusätzliche geometrische Qualität.

Im Zusammenhang mit den Maxwellschen Gleichungen haben wir drei Klassen physikalischer Größen kennengelernt:

– Ladungs- und Stromdichten als Quellen der Elektromagnetischen Felder.

– Potentiale, die die elektromagnetischen Felder durch einen Differentiationsprozeß generieren und selbst einer Wellengleichung (2.10) gehorchen.

– Elektromagnetische Feldstärken, die dynamische Variable in den Maxwellschen Gleichungen sind und die beobachteten physikalischen Kräfte repräsentieren.

Diese Größenklassen werden wir jetzt mit den Methoden des Differentialformenkalküls untersuchen.

5.1 Stromform und Kontinuitätsgleichung

Die in (3.6) eingeführte Viererstromdichte $\boldsymbol{j}$ faßt verschiedene Aspekte der elektrischen Ladung zusammen. Die Ladungsdichte $\rho(\underline{x}, t)$ beschreibt die in einem Volumenelement um $\underline{x}$ vorhandene Ladungsmenge, während die Stromdichte $\underline{j}(\underline{x}, t)$ für Ladung steht, die am Ort $\underline{x}$ innerhalb eines Zeitintervalls durch ein Flächenelement fließt. Diese geometrischen Qualitäten legen es nahe, aus $\boldsymbol{j}$ eine 3–Form zu konstruieren:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota} &= c\rho \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &- j^1 \; dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^2 \; dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - j^3 \; dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \, . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Für die Stromform ist die Verwendung von kovarianten Komponenten obligatorisch, wodurch die Minuszeichen vor den Termen der Stromdichte entstehen. Von besonderem physikalischen Interesse ist ihre äußere Ableitung

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\iota} = \left[\frac{\partial}{\partial x^0}c\rho + \frac{\partial}{\partial x^1}j^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}j^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}j^3\right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \,, \tag{5.2}$$

da innerhalb der eckigen Klammern die Kontinuitätsgleichung reproduziert wird, vgl. (3.5). Aus diesem Grund verschwindet die rechte Seite von Gleichung (5.2), und wir könnnen schreiben:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\iota} = 0 \,. \tag{5.3}$$

Offensichtlich ist im Kalkül der Differentialformen die Kontinuitätsgleichung mit dem Verschwinden der äußeren Ableitung der Stromform äquivalent.

5.2 Potentialform und Lorentzeichung

Die traditionelle Aufgabe von Potentialen ist die Erzeugung von Kraftfeldern durch Differentiation. Dies gilt auch für das Viererpotential $\mathcal{A}$, aus dem auf diese Weise das elektromagnetische Feld entsteht, siehe (3.9) und (3.14). Wie wir bereits festgestellt haben, ist dieses Feld eine 2–Form (4.24) und kann somit nur aus einer 1–Form generiert werden. Die Potentialform lautet daher

$$\boldsymbol{\alpha} = \Phi\, dx^0 - A^1\, dx^1 - A^2\, dx^2 - A^3\, dx^3 \,, \tag{5.4}$$

worin aufgrund der kovarianten Schreibweise die Vektorpotentialterme mit einem Minuszeichen versehen sind. Die äußere Ableitung von $\boldsymbol{\alpha}$ selbst betrachten wir im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit der Feldform $\boldsymbol{\beta}$. Hier wollen wir stattdessen die duale Potentialform $*\boldsymbol{\alpha}$ und deren äußere Ableitung diskutieren. Wir nutzen die Beziehung

$$\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} \;=\; <\boldsymbol{\beta} \cdot *\boldsymbol{\alpha}> \; dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{5.5}$$

aus, um die dualen Basisformen zu berechnen, vgl. auch die Einführung des Hodge Operators in (4.21):

$$\begin{array}{lcllcl} *dx^0 &=& dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad & *dx^2 &=& -\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\ *dx^1 &=& dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \qquad & *dx^3 &=& \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \end{array} \,. \tag{5.6}$$

Mit deren Hilfe kann die duale Potentialform geschrieben werden:

$$\begin{array}{rcl} *\boldsymbol{\alpha} &=& \Phi \;\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &-& A^1 \;\, dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \;-\; A^2 \;\, dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \;-\; A^3 \;\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \,. \end{array} \tag{5.7}$$

Bilden wir von (5.7) die äußere Ableitung, ergibt sich

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} = \left[\frac{\partial}{\partial x^0}\Phi + \frac{\partial}{\partial x^1}A^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}A^3\right] dx^0\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3\,, \tag{5.8}$$

wobei der Term innerhalb der eckigen Klammern aufgrund der Lorentzeichung (2.8) verschwindet:

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{5.9}$$

Im Kalkül der Differentialformen wird also die Lorentzeichung durch das Verschwinden der äußeren Ableitung der dualen Potentialform $*\boldsymbol{\alpha}$ ausgedrückt.

5.3 Feldform und Maxwellsche Gleichungen

Die Feldform $\boldsymbol{\beta}$ hatten wir bereits in Kapitel 4 eingeführt, indem wir sie aus dem Feldstärketensor F abgeleitet haben. Wir wollen nun untersuchen, wie $\boldsymbol{\beta}$ in die Analysis der Differentialformen eingebettet ist, und wie sich dort die zugehörigen Feldgleichungen darstellen. Wir beginnen mit der Berechnung der Feldform aus der Potentialform (5.4) des vorigen Abschnittes duch Bildung der äußeren Ableitung:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \;=\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Phi\, dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}\Phi\, dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}\Phi\, dx^3\right]\wedge dx^0 \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^1\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^2}A^1\, dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^3}A^1\, dx^3\right]\wedge dx^1 \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^2\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^1}A^2\, dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^3}A^2\, dx^3\right]\wedge dx^2 \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^3\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^1}A^3\, dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^2}A^3\, dx^2\right]\wedge dx^3 \\
\;=\;& -\left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^1 + \frac{\partial}{\partial x^1}\Phi\right] dx^0\wedge dx^1 - \left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^2 + \frac{\partial}{\partial x^2}\Phi\right] dx^0\wedge dx^2 \\
&-\left[\frac{\partial}{\partial x^0}A^3 + \frac{\partial}{\partial x^3}\Phi\right] dx^0\wedge dx^3 + \left[\frac{\partial}{\partial x^2}A^1 - \frac{\partial}{\partial x^1}A^2\right] dx^1\wedge dx^2 \\
&+\left[\frac{\partial}{\partial x^3}A^1 - \frac{\partial}{\partial x^1}A^3\right] dx^1\wedge dx^3 + \left[\frac{\partial}{\partial x^3}A^2 - \frac{\partial}{\partial x^2}A^3\right] dx^2\wedge dx^3 \\
\;=\;& E^1\, dx^0\wedge dx^1 + E^2\, dx^0\wedge dx^2 + E^3\, dx^0\wedge dx^3 \\
&-B^3\, dx^1\wedge dx^2 + B^2\, dx^1\wedge dx^3 - B^1\, dx^2\wedge dx^3\,.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Im letzten Rechenschritt wurden die Potentialterme gemäß (2.2) und (2.4) durch Komponenten des elektromagnetischen Feldes ersetzt, wodurch die Feldform aus Gleichung (4.24) reproduziert wird. Somit können wir wie vermutet schreiben:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{5.11}$$

Der in Gleichung (5.10) gewonnene Ausdruck läßt eine Zerlegung von $\boldsymbol{\beta}$ in Differentialformen des $\mathbb{V}^3$ zu:

$$\boldsymbol{\beta} = dx^0 \wedge \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\,, \tag{5.12}$$

wobei $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ dem elektrischen und magnetischen Feld entsprechen:

$$\boldsymbol{E} = E^1 dx^1 + E^2 dx^2 + E^3 dx^3 \tag{5.13.1}$$

$$\boldsymbol{B} = B^1\, dx^2 \wedge dx^3 + B^2\, dx^3 \wedge dx^1 + B^3\, dx^1 \wedge dx^2\,. \tag{5.13.2}$$

Wir haben uns der in diesem Fall üblichen Schreibweise angepaßt und die Formen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ nicht mit griechischen Buchstaben dargestellt. In Gleichung (5.12) wird $\boldsymbol{E}$ als 1–Form und $\boldsymbol{B}$ als 2–From interpretiert, wodurch beide Größen jeweils unterschiedliche geometrische Qualitäten erhalten. Die Anwendung des Lemmas von Poincaré (4.45) liefert uns die erste Feldgleichung:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} = \mathsf{dd}\boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{5.14}$$

Dieser Ausdruck entspricht den beiden homogenen Maxwellgleichungen (2.1.2) und (2.1.3), die schon in der elementaren Darstellung des 2. Kapitels die Funktion von Integrabilitätsbedingungen hatten. Die fehlende zweite Feldgleichung, welche die Reaktion des elektromagnetischen Feldes auf Ladungen und Stromdichten beschreibt, gewinnen wir aus der Betrachtung der dualen Feldform (4.26):

$$\begin{aligned} *\boldsymbol{\beta} &= B^1\, dx^0 \wedge dx^1 + B^2\, dx^0 \wedge dx^2 + B^3\, dx^0 \wedge dx^3 \\ &+ E^3\, dx^1 \wedge dx^2 - E^2\, dx^1 \wedge dx^3 + E^1\, dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}\;. \tag{5.15}$$

Auch diese läßt sich in zwei Differentialformen des $\mathbb{V}^3$ zerlegen:

$$*\boldsymbol{\beta} = dx^0 \wedge *\boldsymbol{B} + *\boldsymbol{E}\,. \tag{5.16}$$

Die Elemente aus (5.16) besitzen die folgende Gestalt:

$$*\boldsymbol{E} = E^1\, dx^2 \wedge dx^3 + E^2\, dx^3 \wedge dx^1 + E^3\, dx^1 \wedge dx^2 \tag{5.17.1}$$

$$*\boldsymbol{B} = B^1 dx^1 + B^2 dx^2 + B^3 dx^3\,. \tag{5.17.2}$$

Anhand der Basisduale in Gleichung (4.28) läßt sich leicht nachvollziehen, daß es sich bei $*\boldsymbol{E}$ und $*\boldsymbol{B}$ tatsächlich um die dualen Formen von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ handelt. Im Vergleich mit der Zerlegung (5.12) der Feldform $\boldsymbol{\beta}$ hat sich der Charakter der Felder geändert, da nun das eletrische Feld durch eine 2–Form und das magnetische Feld durch eine 1–Form beschrieben wird. Auf diese Weise unterscheiden sich die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ schon im Vakuum deutlich von ihren Gegenstücken in Materie $\boldsymbol{D} \equiv *\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H} \equiv *\boldsymbol{B}$. Bei Einführung eines Dielektrikums addiert sich dessen Wirkung zu den Eigenschaften der Metrik, mit deren Hilfe der Hodge Operator $*$ konstruiert wurde. Wir haben die zerlegten Formen (5.12) und und (5.16) vorgestellt, weil sie häufig in aktuellen Abhandlungen der Elektrodynamik zu finden sind und zunächst aufgrund der unterschiedlichen Stufen von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ widersinnig erscheinen können. Die zweite Feldgleichung entsteht, indem wir die äußere Ableitung der dualen Feldform (5.15) bilden:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}*\boldsymbol{\beta} \;=\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^2} B^1\, dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} B^1\, dx^3\right] \wedge dx^0 \wedge dx^1 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^1} B^2\, dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^3} B^2\, dx^3\right] \wedge dx^0 \wedge dx^2 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^1} B^3\, dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} B^3\, dx^2\right] \wedge dx^0 \wedge dx^3 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^3\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^3} E^3\, dx^3\right] \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
-\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^2\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^2} E^2\, dx^2\right] \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^1\, dx^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} E^1\, dx^1\right] \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
=\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^3 + \frac{\partial}{\partial x^2} B^1 - \frac{\partial}{\partial x^1} B^2\right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
-\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^2 + \frac{\partial}{\partial x^1} B^3 - \frac{\partial}{\partial x^3} B^1\right] dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^0} E^1 + \frac{\partial}{\partial x^3} B^2 - \frac{\partial}{\partial x^2} B^3\right] dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
+\;& \left[\frac{\partial}{\partial x^1} E^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} E^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} E^3\right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
=\;& \frac{4\pi}{c}\Big[c\rho\;\; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^1\;\; dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
-\;& j^2\;\; dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - j^3\;\; dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2\Big]\,.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Im letzten Rechenschritt wurden die Maxwellgleichungen (2.1.1) und (2.1.4) dazu benutzt, die Feldterme durch Ladung und Stromdichte zu ersetzen. Verwenden wir die oben eingeführte Stromform (5.1), können wir schreiben:

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}\,. \tag{5.19}$$

Fassen wir beide Feldgleichungen zusammen, erhalten wir die Maxwellschen Gleichungen in einer äußerst kompakten Darstellung:

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} \;= 0 \tag{5.20.1}$$

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}\,. \tag{5.20.2}$$

Wie zu Anfang dieses Kapitels angekündigt, enthalten diese Gleichungen ausschließlich invariante Größen. Feldstärken und Quellen des elektromagnetischen Feldes, die wir bisher als Skalare, Vektoren oder Vierertensoren kennengelernt haben, sind nun in die Differentialformen $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\iota}$ eingebettet. Die äußere Ableitung d verallgemeinert die Differentialoperatoren der Vektoranalysis inklusive ihrer Invarianzeigenschaften für beliebige Dimensionen, ein Schritt, für den es in der kovarianten Formulierung keine Entsprechung gab. Ebenfalls basisunabhängig ist der Hodge Operator $*$, mit dessen Hilfe das Konzept der dualen Felder auf Differentialformen übertragen wird. Mit (5.20) steht uns somit eine Form der Maxwellschen Gleichungen zur Verfügung, die unsere anfangs gestellten Forderungen in vollem Umfang erfüllt.

5.4 Äußere Ableitung und Wellengleichung

Eine weitere interessante Frage ist, welche Form die Wellengleichung im Kalkül der Differentialformen erhält. Aus der inhomogenen Gleichung (5.20.2) für das Feld $\boldsymbol{\beta}$ gewinnen wir einen Ausdruck für das Potential $\boldsymbol{\alpha}$, indem wir dessen Definition $\boldsymbol{\beta} = \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}$ verwenden:

$$\mathsf{d}{*}\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}\,. \tag{5.21}$$

Das Potential ist eine 1–Form, und somit ist das Ergebnis der Operation $\mathsf{d}{*}\mathsf{d}$ eine 3–Form. Der Laplaceoperator Δ und der D'Alembertoperator $\Box$ hingegen wirken komponentenweise und ändern den Tensorcharakter ihres Operanden nicht, so daß aus Skalaren wieder Skalare und aus Vektoren erneut Vektoren entstehen. Aus diesem Grund betrachten wir statt Gleichung (5.21) deren duale Form

$$*\mathsf{d}{*}\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{c}{*}\boldsymbol{\iota}\,, \tag{5.22}$$

denn diese produziert aus einer p–Form wieder eine p–Form. Auf der linken Seite ist auf diese Weise ein Teil desjenigen Operators entstanden, der den Laplace– und den D'Alembertoperator für beliebige Dimensionen verallgemeinert und als Laplace– Beltramioperator bezeichnet wird. Speziell im vierdimensionalen Minkowskiraum und mit einer 1–Form als Operanden nimmt dieser Operator die Gestalt

$$\mathbf{\Delta}_{\text{LB}} = \mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} + {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d} = \mathsf{d}\delta + \delta\mathsf{d} \tag{5.23}$$

an, denn das Vorzeichen der Koableitung δ aus (4.67) ergibt mit $n = 4$, $N_I = 3$ und beliebigem p den Wert

$$(-1)^{n(p+1)+1+N_I} = 1\,. \tag{5.24}$$

Die allgemeine Form von $\mathbf{\Delta}_{\text{LB}}$ verbunden mit dem Beweis, daß die Gleichung (5.23) tatsächlich bei beliebigen Operanden zur Verallgemeinerung des Laplace– bzw. D'Alembertoperators führt, präsentieren wir in Anhang D.5. Damit lautet die kovariante Form der Wellengleichung:

$$\mathbf{\Delta}_{\text{LB}}\,\boldsymbol{\alpha} = \Big[\mathsf{d}\delta + \delta\mathsf{d}\Big]\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{c}{*}\boldsymbol{\iota}\,. \tag{5.25}$$

Aufgrund der Lorentzeichung $\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} = 0$ verschwindet der erste Term der eckigen Klammer, wodurch Gleichung (5.25) zu Gleichung (5.22) äquivalent wird.

5.5 Koableitung und Lagrangedichte

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie sich die Erzeugung der Maxwellschen Gleichungen aus dem Hamiltonschen Variationsprinzip in den Differentialformenkalkül übertragen läßt. Die Stärke des Lagrangeformalismus liegt in der Invarianz der Lagrangedichte gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen, wodurch sich die jeweilige physikalische Situation ohne Einschränkung in angemessenen Koordinaten beschreiben läßt. Die Euler– Lagrangeschen Gleichungen generieren dann die für dieses System passenden Bewegungsgleichungen. Das ganze Verfahren beruht somit auf der Wahl geeigneter Koordinaten, und die Einführung eines koordinatenfreien Konzeptes wie das der Differentialformen hat unter diesem Aspekt auf den ersten Blick einen gewissen Erklärungsbedarf.

Mit der Absicht, diesen Punkt im Verlauf der Diskussion erneut anzusprechen, wollen wir untersuchen, wie sich die Lagrangedichte des elektomagnetischen Feldes in Differentialformen ausdrücken läßt. Ihre kovariante Form lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\,j^{\alpha}A_{\alpha}\,, \tag{5.26}$$

vgl. (3.33). Beide Terme der Lagrangedichte enthalten eine Überschiebung schiefsymmetrischer Tensoren. In Anhang E.1 wird gezeigt, daß diese Überschiebungsoperationen mit Hilfe des Hodge Operators und des Schiefproduktes folgendermaßen geschrieben werden können:

$$A^{i_1 \cdots i_p} B_{i_1 \cdots i_p} = p! * (*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \,. \tag{5.27}$$

$\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ sind die aus den schiefsymmetrischen Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gebildeten Differentialformen. Auch die in der Lagrangedichte (5.26) vorkommenden Tensorgrößen drücken wir jetzt durch Differentialformen aus:

$$\begin{array}{lll} F^{\alpha\beta} & \Rightarrow \boldsymbol{\beta} & \text{(2–Form)} \\ A^{\alpha} & \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} & \text{(1–Form)} \\ j^{\alpha} & \Rightarrow *\boldsymbol{\iota} & \text{(1–Form)} \end{array}$$

Die Darstellung der Stromdichte durch $*\boldsymbol{\iota}$ ist notwendig, weil $\boldsymbol{\iota}$ eine 3–Form ist, die Formel (5.27) für die Überschiebung mit A_α jedoch eine 1–Form erfordert. Nun können wir die Überschiebungsausdrücke in der Lagrangedichte ersetzen

$$*\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{8\pi} * (*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta}) - \frac{1}{c} * (\boldsymbol{\iota} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \,, \tag{5.28}$$

wobei im zweiten Term $**\boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\iota}$ verwendet wurde. Unserer Konvention folgend haben wir mit $\boldsymbol{\lambda}$ auch für die Differentialform der Lagrangedichte einen griechischen Buchstaben eingeführt. Daß wir den Ausdruck (5.28) als die duale Lagrangedichte und nicht als $\boldsymbol{\lambda}$ selbst auffassen, hat folgenden Grund: Die Formeln (5.27) beschreiben das Ergebnis einer Überschiebung als Nullform. Für die Lagrangedichte ist jedoch die Darstellung als 4–Form angemessener, da $\boldsymbol{\lambda}$ in diesem Fall direkt als Integrand des Wirkungsintegrals operieren kann:

$$S = \int \boldsymbol{\lambda} \,. \tag{5.29}$$

Unter Ausnutzung der Integrabilitätsbedingungen für das elektromagnetische Feld ersetzen wir $\boldsymbol{\beta} = \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}$ und erhalten als Differentialformdarstellung der Lagrangedichte

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{8\pi} * \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{c} \boldsymbol{\iota} \wedge \boldsymbol{\alpha} \,. \tag{5.30}$$

Die Aufstellung der Euler– Lagrangeschen Gleichungen nach geeigneter Koordinatenwahl entspräche einer Aufhebung der eben durchgeführten Rechenschritte und kommt daher für eine koordinatenfreie Herleitung der Feldgleichungen nicht in Frage. Stattdessen bilden wir das Wirkungsintegral und rekapitulieren das Hamiltonsche Variationsprinzip für die so entstandene koordinatenfreie Darstellung der Wirkung S:

$$S = -\frac{1}{8\pi} \int * \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{c} \int \boldsymbol{\iota} \wedge \boldsymbol{\alpha} \,. \tag{5.31}$$

Die Definition der Koableitung δ in Kapitel 4 basierte auf der Einführung des Skalarproduktes (4.58):

$$< \boldsymbol{\alpha} \,|\, \boldsymbol{\beta} > = \int \boldsymbol{\alpha} \wedge * \boldsymbol{\beta} \,. \tag{5.32}$$

Offensichtlich entspricht die Struktur der Integranden in (5.31) dieser Form, und wir können folgende Ersetzung vornehmen:

$$S = -\frac{1}{8\pi} < \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} > + \frac{1}{c} < \boldsymbol{\alpha} \,|\, * \boldsymbol{\iota} > \,. \tag{5.33}$$

Hierbei haben wir erneut $\boldsymbol{\iota} = ** \boldsymbol{\iota}$ ausgenutzt. Um Gleichung (5.32) anwenden zu können, mußten die Terme innerhalb der Schiefprodukte so umgestellt werden, daß der rechte Faktor den Hodge Operator enthält. Hierdurch wechselt der zweite Summand das Vorzeichen, der erste jedoch nicht. Zur Herleitung der Feldgleichungen untersuchen wir, wie sich die Wirkung S verändert, wenn das Potential $\boldsymbol{\alpha}$ variiert wird:

$$\begin{aligned}
\triangle S &= -\frac{1}{8\pi} < \mathsf{d}\triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} > - \frac{1}{8\pi} < \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathsf{d}\triangle\boldsymbol{\alpha} > + \frac{1}{c} < \triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, * \boldsymbol{\iota} > && (5.34.1) \\
&= -\frac{1}{4\pi} < \mathsf{d}\triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} > + \frac{1}{c} < \triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, * \boldsymbol{\iota} > && (5.34.2) \\
&= -\frac{1}{4\pi} < \triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, \delta\, \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} > + \frac{1}{c} < \triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, * \boldsymbol{\iota} > && (5.34.3) \\
&= -\frac{1}{4\pi} < \triangle\boldsymbol{\alpha} \,|\, \left[\delta\, \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} - \frac{4\pi}{c} * \boldsymbol{\iota} \right] > \,. && (5.34.4)
\end{aligned}$$

Die einzelnen Rechenschritte in den Umformungen (5.34) kommentieren wir wie folgt:

– *Gleichung (5.34.1):*
  Wie bei der Herleitung der Euler– Lagrange– Gleichungen Variationsableitung und partielle Ableitung vertauscht werden dürfen, ist hier die Vertauschung von Variationsableitung $\triangle$ und äußerer Ableitung d erlaubt.

– *Gleichung (5.34.2):*
  Die ersten beiden Summanden aus (5.34.1) wurden aufgrund der Symmetrie des Skalarproduktes $< | >$ zusammengefaßt.

– *Gleichung (5.34.3):*
  Die Koableitung ist bezüglich des Skalarproduktes $< | >$ nur dann der adjungierte Operator zur äußeren Ableitung, wenn die im Skalarpodukt vorkommenden Differentialformen am Rand des Integrationsgebietes verschwinden. Da dem Hamiltonschen Prinzip zufolge die Variation $\triangle\boldsymbol{\alpha}$ in den Randbereichen festgehalten wird, ist diese Voraussetzung erfüllt, womit die Adjungiertheitsrelation (4.59) verwendet werden darf.

Die Feldgleichungen ergeben sich aus der Forderung, daß die Wirkung trotz nichtverschwindender Variation $\triangle\boldsymbol{\alpha}$ stationär wird:

$$\triangle S = 0 \quad \text{mit} \quad \triangle\boldsymbol{\alpha} \neq 0\,. \tag{5.35}$$

Daraus folgt, daß der Term innerhalb der eckigen Klammer von (5.34.4) verschwinden muß:

$$\delta\,\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} - \frac{4\pi}{c}{*}\boldsymbol{\iota} \;=\; 0 \tag{5.36.1}$$

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta} \;=\; \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}\,. \tag{5.36.2}$$

Der letzte Schritt reproduziert aus (5.36.1) die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen durch Rücktransformation von $\boldsymbol{\beta} = \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}$ und Auflösung der Koableitung gemäß (4.67.2). Das Vorzeichen der Koableitung wird durch die Parameter $n = 4$, $q = 2$ und $N_I = 3$ festgelegt. Mit der Lagrangedichte (5.30) und der daraus abgeleiteten Wirkung (5.33) ist es uns gelungen, die Feldgleichungen unter Umgehung des Euler– Lagrangeschen Verfahrens über eine koordinatenfreie Methode zu generieren. Wie schon bei der Viererdarstellung sind die homogenen Maxwellschen Gleichungen bereits in die Lagrangedichte integriert und treten nicht separat in Erscheinung.

5.6 Vektorwertige 1–Formen und der Energie- Impulstensor

Die bisher in diesem Kapitel vorgestellten Größen waren schiefsymmetrische Tensoren, die sich hervorragend für die Interpretation als Differentialformen eigneten. Der zur Beschreibung der Energie– Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes eingeführte Energie– Impulstensor $T^{\mu\nu}$ ist jedoch symmetrisch, so daß für die Umstellung der Bilanzgleichung (3.56) auf Differentialformen ein alternativer Zugang gefunden werden muß. Zu Beginn dieser Untersuchung notieren wir noch einmal die kovariante Form der Energie– Impulsbilanz

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = -f^\nu \tag{5.37.1}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left[F^\mu{}_\alpha F^{\nu\alpha} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right], \tag{5.37.2}$$

die wir unter neuen Gesichtspunkten analysieren wollen. Dieses Thema wurde u.a. in dem Newsgroup- Thread [BERU98] in *sci.physics.research* diskutiert. Die entscheidende Idee besteht darin, für den Energie– Impulstensor keine äquivalente 2–Form zu suchen, sondern diesen als „vektorwertige 1–Form“ aufzufassen. Gemeint ist damit ein Mischkonstrukt, dessen Komponenten mit einem Index im Grundvektorraum und mit dem anderen Index im Dualraum existieren. Die Koeffizienten dieser Darstellung besitzen daher einen hoch– und einen tiefstehenden Index:

$$T_\mu{}^\nu = \frac{1}{4\pi}\left[F_\mu{}^\alpha F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4}\,\delta_\mu{}^\nu\, F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\right]. \tag{5.38}$$

Im ersten Term wurden die Indizes α und ν vertauscht, die Stellung der Summationsindizes geändert und anschließend der Index μ mit Hilfe der Metrik gesenkt. Die $\delta_\mu{}^\nu$ sind die Komponenten der vierdimensionalen Einheitsmatrix. Damit zerfällt der Energie– Impulstensor spaltenweise in vier unabhängige 1–Formen

$$\boldsymbol{\tau}^\nu := T_\mu{}^\nu\, dx^\mu\,, \tag{5.39}$$

auf welche die differentialformtypischen Operatoren $\wedge$, $*$ und d separat wirken. Für die folgenden Rechnungen haben wir in Anhang E einige Hilfsmittel bereitgestellt, mit denen wir die in der Tensorform (5.37) vorkommenden Überschiebungsoperationen im

Differentialformenkalkül ausdrücken können. Eingeschränkt auf den vierdimensionalen Minkowskiraum ($n = 4$, $N_I = 3$) lauten diese Beziehungen:

$$\delta\boldsymbol{\alpha} \;=\; *\mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha} \;=\; \frac{\partial}{\partial x^\mu}A^\mu \tag{5.40.1}$$

$$*(*\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) \;=\; -\,A_\mu B^\mu \;=\; -\,A^\mu B_\mu \tag{5.40.2}$$

$$*(*\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\alpha}) \;=\; G_{\mu\nu}A^\mu\,dx^\nu \;=\; -\,G_\nu{}^\mu A_\mu\,dx^\nu \tag{5.40.3}$$

$$*(*\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\delta}) \;=\; -\,\frac{1}{2}\,G_{\mu\nu}D^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\,G_\nu{}^\mu D_\mu{}^\nu\,. \tag{5.40.4}$$

Hierbei stehen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ für 1–Formen mit den Koeffizienten A_μ und B_μ, während $\boldsymbol{\gamma}$ und $\boldsymbol{\delta}$ die Koeffizienten $G_{\mu\nu}$ bzw. $D_{\mu\nu}$ besitzen und somit 2–Formen repräsentieren. Die erste Gleichung beschreibt die Divergenz als Koableitung während die restlichen drei Gleichungen Überschiebungen des Vektor– Vektor–, des Matrix– Vektor– und des Matrix– Matrix– Typs mit Hilfe von Schiefprodukt und Hodge Operator darstellen.

Die Auffassung des Energie– Impulstensors als vektorwertige 1–Form entspricht einer Zerlegung dieses Tensors in vier separate 1–Formen $\boldsymbol{\tau}^\nu$. Da die Divergenz in der Bilanzgleichung (5.37.1) auf die Spalten von $T^{\mu\nu}$ und damit auf jedes $\boldsymbol{\tau}^\nu$ getrennt wirkt, können wir sie gemäß der Beziehung (5.40.1) durch die Koableitung ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = \delta\boldsymbol{\tau}^\nu = -f^\nu\,. \tag{5.41}$$

Der Quellterm in Gleichung (5.41) ist die kontravariante Komponente f^ν der Lorentz–Viererkraft, die wir nun mit den Methoden der äußeren Algebra aus der Kraftform $\boldsymbol{f}$ extrahieren werden. Der Einfachheit halber haben wir für $\boldsymbol{f}$ keinen eigenen griechischen Buchstaben eingeführt. Die Komponente f^ν schreiben wir als formale Überschiebung der Viererkraft mit dem Basisvektor

$$dx^\nu = \delta_\alpha{}^\nu\,dx^\alpha\,, \tag{5.42}$$

für den die $\delta_\alpha{}^\nu$ Expansionskoeffizienten sind. Wir erhalten unter Ausnutzung der Beziehung (5.40.2) den Ausdruck

$$f^\nu \;=\; f^\alpha\,\delta_\alpha{}^\nu \;=\; -\,*(*\boldsymbol{f}\wedge dx^\nu)\,. \tag{5.43}$$

Um schließlich die $\boldsymbol{\tau}^\mu$ selbst als Differentialformen schreiben zu können, betrachten wir in einem ersten Schritt die Komponenten $F_\alpha{}^\nu$ des ersten Termes von (5.38) als vektorwertige 1–Form. Analog zur Viererkraftkomponente f^ν erzeugen wir die Form der Matrix– Vektor– Überschiebung durch einen Kunstgriff:

$$F_\alpha{}^\nu\, dx^\alpha = F_\alpha{}^\beta\, \delta_\beta{}^\nu\, dx^\alpha\,. \tag{5.44}$$

Auf diese Weise läßt sich die Beziehung (5.40.3) ausnutzen und wir erhalten

$$F_\alpha{}^\nu\, dx^\alpha \;=\; -*(*\boldsymbol{\beta}\wedge dx^\nu) \;=:\; \boldsymbol{\beta}^\nu\,, \tag{5.45}$$

da $F_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der Feldform $\boldsymbol{\beta}$ sind. Die Schreibweise $\boldsymbol{\beta}^\nu$ haben wir analog zu $\boldsymbol{\tau}^\nu$ eingeführt, um deutlich zu machen, daß die $\boldsymbol{\beta}^\nu$ ebenfalls vier separate 1–Formen bilden. Mit Hilfe der oben bereitgestellten Beziehungen (5.40.3) und (5.40.4) können wir die Differentialformdarstellung der $\boldsymbol{\tau}^\nu$ direkt aus der Komponentenform (5.38) des Energie– Impulstensors ableiten, bevor wir anschließend die Gültigkeit der Bilanzgleichung (5.41) mit Differentialformmethoden verifizieren. Der erste Term in (5.38) ist eine Matrix– Vektor– Überschiebung der Komponenten $F_{\mu\nu}$ des Feldstärketensors mit sich selbst. Wir berechnen diesen Term, indem wir die rechts stehenden $F_\mu{}^\alpha$ als Komponenten der vektorwertigen 1–Form $\boldsymbol{\beta}^\nu$ interpretieren und die Beziehung (5.40.3) anwenden:

$$F_\mu{}^\alpha F_\alpha{}^\nu\, dx^\mu \;=\; F_\mu{}^\alpha\, \boldsymbol{\beta}^\nu_\alpha\, dx^\mu \;=\; -*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu)\,. \tag{5.46}$$

Der zweite Term in (5.38) ist eine Matrix– Matrix– Überschiebung der $F_{\mu\nu}$ mit sich selbst und kann daher direkt mit Hilfe von (5.40.4) ausgewertet werden:

$$\frac{1}{4}\, F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \;=\; -\,\frac{1}{2}\, *(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\,. \tag{5.47}$$

Setzen wir die letzten beiden Ausdrücke in (5.39) bzw. (5.38) ein, erhalten wir

$$\boldsymbol{\tau}^\nu = T_\mu{}^\nu\, dx^\mu = -\,\frac{1}{4\pi}\left[*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu) + \frac{1}{2}\, *(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\, dx^\nu\right]. \tag{5.48}$$

Damit lautet die gesuchte Darstellung der Energie– Impulsbilanz in Differentialformen

$$\delta\boldsymbol{\tau}^\nu \;=\; *(*\boldsymbol{f}\wedge dx^\nu) \tag{5.49.1}$$

$$\boldsymbol{\tau}^\nu \;=\; -\,\frac{1}{4\pi}\left[*\Big(*\boldsymbol{\beta}\wedge *(*\boldsymbol{\beta}\wedge dx^\nu)\Big) + \frac{1}{2}\, *(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\, dx^\nu\right], \tag{5.49.2}$$

wobei wir sowohl die $\boldsymbol{\beta}^\nu$ als auch die f^ν explizit durch die Feld– bzw. Kraftform ausgedrückt haben.

Um die Gültigkeit der Bilanzgleichungen (5.49) überprüfen zu können, benötigen wir zunächst zwei weitere Beziehungen, die sich direkt aus den beiden Maxwellgleichungen (5.20) ableiten lassen:

– *Inhomogene Feldgleichung* $\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}$:
In Kapitel 3 hatten wir für die Lorentzkraft die kovariante Darstellung

$$f^{\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_{\mu} \tag{5.50}$$

gefunden. Unter Ausnutzung der Beziehung (5.40.3) folgt hieraus die Schreibweise der Lorentzkraft in Differentialformen, welche sich mit Hilfe der inhomogenen Maxwellgleichungen durch die Feldform allein ausdrücken läßt:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{c} *({*\boldsymbol{\beta}} \wedge {*\boldsymbol{\iota}}) = \frac{1}{4\pi} *({*\boldsymbol{\beta}} \wedge {*\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}})\,. \tag{5.51}$$

Das Vorzeichen ergibt sich aus Gleichung (5.40.3), wobei auf die Position des Summationsindex im Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ zu achten ist. Die Verwendung der dualen Stromform ${*\boldsymbol{\iota}}$ folgt aus der Formel (5.40.3), welche an Stelle der Stromdichte eine 1–Form verlangt. Schließlich berechnen wir mit Hilfe von (5.43) in zwei Schritten die Darstellung der Komponente f^{ν} aus der Feldform $\boldsymbol{\beta}$ bzw. $\boldsymbol{\beta}^{\nu}$:

$$\begin{aligned} {*\boldsymbol{f}} \wedge dx^{\nu} &= \frac{1}{4\pi} ({*\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}}) \wedge {*\boldsymbol{\beta}} \wedge dx^{\nu} && (5.52) \\ {*f^{\nu}} &= \frac{1}{4\pi} ({*\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta}}) \wedge {*\boldsymbol{\beta}^{\nu}}\,. && (5.53) \end{aligned}$$

Hierbei mußte mehrfach das Quadrat des Hodge Operators eingefügt bzw. berechnet werden, wobei zu beachten ist, daß diese Operation im vierdimensionalen Minkowskiraum bei 0–, 2– und 4–Formen zu einem Vorzeichenwechsel führt.

– *Homogene Feldgleichung* $\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} = 0$:
Zur Berechnung der Divergenz von $\boldsymbol{\tau}^{\nu}$ benötigen wir einen weiteren Zusammenhang, den wir aus den homogenen Maxwellgleichungen erhalten. Dieser Zusammenhang lautet

$$F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} F_{\beta}{}^{\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.54}$$

und ist ein Bestandteil der Herleitung des Energie– Impulstensors, wenn diese ohne Rückgriff auf das Noethertheorem direkt aus den Maxwellschen Gleichungen durchgeführt wird wie z.B. in [Gre82]. Die Übertragung der Beziehung (5.54) in die Sprache der Differentialformen erinnert an die Behandlung der BAC–CAB

Regel in Kapitel 4, allerdings handelt es sich diesmal um 2–Formen und nicht um 1–Formen. Ausgangspunkt ist die aus den homogenen Maxwellschen Gleichungen abgeleitete 4–Form:

$$\boldsymbol{\beta} \wedge dx^{\nu} \wedge *\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} \;=\; 0\,. \tag{5.55}$$

Da sich hier alle Bestandteile zur vierdimensionalen Volumenform ergänzen, ist es nach der Definition (4.21.2) des Hodge Operators möglich, diesen Ausdruck in ein Skalarprodukt umzuschreiben:

$$\boldsymbol{\beta} \wedge dx^{\nu} \wedge *\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} \;=\; <\boldsymbol{\beta} \wedge dx^{\nu} \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}> \,\mathbf{vol}\;. \tag{5.56}$$

Dieses Skalarprodukt schreiben wir folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{\beta} \wedge dx^{\nu} \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}> \quad &= \quad \frac{1}{4}\, F_{\alpha\beta}\, \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F_{\gamma\delta} \;\cdots \\ &\cdots \quad < dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\nu} \,\cdot\, dx^{\mu} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} > \;. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Der Vorfaktor 1/4 entsteht durch die Aufhebung der Beschränkung der $_{\alpha\beta}-$ und $_{\gamma\delta}-$ Summen auf die wesentlichen Elemente. In dem Skalarprodukt werden 3–Basisformen miteinander multipliziert, weswegen es gemäß (4.20) als Gramsche Determinante ausgewertet werden kann. Die Koeffizienten dieser Determinante sind aufgrund $(\, dx^{\mu} \cdot dx^{\nu}\,) = g^{\mu\nu}$ die Komponenten des inversen Metrischen Tensors:

$$< dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\nu} \,\cdot\, dx^{\mu} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} > \;=\; \begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} & g^{\alpha\gamma} & g^{\alpha\delta} \\ g^{\beta\mu} & g^{\beta\gamma} & g^{\beta\delta} \\ g^{\nu\mu} & g^{\nu\gamma} & g^{\nu\delta} \end{vmatrix}\;. \tag{5.58}$$

Wir entwickeln diese Determinante nach der untersten Zeile und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} & g^{\alpha\gamma} & g^{\alpha\delta} \\ g^{\beta\mu} & g^{\beta\gamma} & g^{\beta\delta} \\ g^{\nu\mu} & g^{\nu\gamma} & g^{\nu\delta} \end{vmatrix} \quad &= \quad g^{\nu\mu} \begin{vmatrix} g^{\alpha\gamma} & g^{\alpha\delta} \\ g^{\beta\gamma} & g^{\beta\delta} \end{vmatrix} + \cdots \\ \cdots \;+\; g^{\nu\delta} &\begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} & g^{\alpha\gamma} \\ g^{\beta\mu} & g^{\beta\gamma} \end{vmatrix} - g^{\nu\gamma} \begin{vmatrix} g^{\alpha\mu} & g^{\alpha\delta} \\ g^{\beta\mu} & g^{\beta\delta} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

Nach Wiedereinführung der Skalarprodukte lautet diese Gleichung

$$\begin{aligned} &< dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \wedge dx^{\nu} \,\cdot\, dx^{\mu} \wedge dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} > \;= \\ &\qquad = \; g^{\nu\mu} < dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \cdot dx^{\gamma} \wedge dx^{\delta} > \;+\; \cdots \\ &\qquad \cdots \;+\; g^{\nu\delta} < dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \cdot dx^{\mu} \wedge dx^{\gamma} > \;-\; \cdots \\ &\qquad \cdots \;-\; g^{\nu\gamma} < dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \cdot dx^{\mu} \wedge dx^{\delta} >. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Setzen wir dieses Resultat in (5.57) ein, ergibt sich

$$<\boldsymbol{\beta} \wedge dx^\nu \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}> = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_{\gamma\delta} \cdots \tag{5.61}$$

$$\cdots \Big[g^{\nu\mu} < dx^\alpha \wedge dx^\beta \cdot dx^\gamma \wedge dx^\delta > \; + 2\, g^{\nu\delta} < dx^\alpha \wedge dx^\beta \cdot dx^\mu \wedge dx^\gamma > \Big],$$

denn die letzten beiden Terme können nach Vertauschung und Umbenennung der Indizes γ und δ zusammengefaßt werden. Im nächsten Schritt interpretieren wir die einzelnen Basiszerlegungen wieder als Feldformen:

$$<\boldsymbol{\beta} \wedge dx^\nu \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}> = g^{\nu\mu} <\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\beta}> \; + \; <\boldsymbol{\beta} \cdot dx^\mu \wedge \frac{\partial}{\partial x^\mu} F_\gamma{}^\nu dx^\gamma>. \tag{5.62}$$

Der zweite Term läßt sich mit Hilfe der Definition (5.45) für die $\boldsymbol{\beta}^\nu$ kompakter gestalten. Da die μ–Summe keiner weiteren Einschränkung unterliegt, können darüberhinaus die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ wieder zur äußeren Ableitung d zusammengefaßt werden:

$$<\boldsymbol{\beta} \wedge dx^\nu \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}> = g^{\nu\mu} <\boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\beta}> \; + \; <\boldsymbol{\beta} \cdot \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu>. \tag{5.63}$$

Schließlich konstruieren wir aus den Skalarprodukten wieder die entsprechenden 4–Volumenformen und erhalten so die für uns geeignete Darstellung der gesuchten Hilfsbeziehung

$$\boldsymbol{\beta} \wedge dx^\nu \wedge *\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} \; = \; g^{\nu\mu} *\boldsymbol{\beta} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\beta} \; + \; *\boldsymbol{\beta} \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu \; = \; 0\,. \tag{5.64}$$

Das gleiche Resultat erhält man auch aus der Komponentenform (5.54), wenn die einzelnen Terme mit Hilfe von (5.40.3) und (5.40.4) in Differentialformen umgerechnet werden.

Mit Hilfe der beiden Gleichungen (5.53) und (5.64) läßt sich die Energie– Impulsbilanz (5.49) direkt verifizieren. Der Übersichtlichkeit halber listen wir beide Beziehungen noch einmal auf:

$$\frac{1}{4\pi} (*\mathsf{d}*\boldsymbol{\beta}) \wedge *\boldsymbol{\beta}^\nu \; = \; *f^\nu \qquad \Leftarrow \text{ Aus (5.53)} \tag{5.65.1}$$

$$g^{\nu\mu} *\boldsymbol{\beta} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\mu} \boldsymbol{\beta} \; + \; *\boldsymbol{\beta} \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu \; = \; 0\,. \qquad \Leftarrow \text{ Aus (5.64)} \tag{5.65.2}$$

Wir schreiben auch $\boldsymbol{\tau}^\nu$ noch einmal hin und bilden zunächst den Ausdruck $*\boldsymbol{\tau}^\nu$:

$$\boldsymbol{\tau}^\nu \;=\; -\frac{1}{4\pi} \left[*(*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta}^\nu) + \frac{1}{2} *(*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta})\, dx^\nu \right] \tag{5.66}$$

$$*\boldsymbol{\tau}^\nu \;=\; -\frac{1}{4\pi} \left[*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta}^\nu + \frac{1}{2} *(*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta}) *dx^\nu \right]. \tag{5.67}$$

Bei der Berechnung von (5.67) wurde ausgenutzt, daß $**(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu)=*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu$ gilt und daß es sich bei $*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})$ einen Skalar handelt. Als nächstes bilden wir die äußere Ableitung:

$$\mathsf{d}*\boldsymbol{\tau}^\nu \;=\; -\frac{1}{4\pi}\left[\mathsf{d}(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\,dx^\mu\wedge *dx^\nu\right]. \tag{5.68}$$

Wir betrachten den ersten Term genauer und wenden die Produktregel an:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu) &= (\mathsf{d}*\boldsymbol{\beta})\wedge\boldsymbol{\beta}^\nu + *\boldsymbol{\beta}\wedge\mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu \\ &= *\boldsymbol{\beta}^\nu\wedge *\mathsf{d}*\boldsymbol{\beta} + *\boldsymbol{\beta}\wedge\mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu \qquad \Leftarrow \text{ Aus (4.22.3)} \\ &= -4\pi *f^\nu + *\boldsymbol{\beta}\wedge\mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu . \qquad \Leftarrow \text{ Aus (5.65.1)}\end{aligned} \tag{5.69}$$

In der zweiten Zeile wurde zunächst $\boldsymbol{\beta}^\nu$ um das Quadrat des Hodge Operators erweitert, wodurch das Vorzeichen einer 1–Form nicht geändert wird. Die anschließende Vertauschung der Faktoren ist erlaubt, da es sich bei dem Term um eine 4–Volumenform handelt. Wir wenden uns jetzt dem zweiten Teil aus (5.68) zu und betrachten zunächst den Ausdruck $dx^\mu\wedge *dx^\nu$, den wir mit Hilfe der Definitionsgleichung (4.21.2) des Hodge Operators umformen:

$$dx^\mu\wedge *dx^\nu \;=\; <dx^\mu\cdot dx^\nu>\,\mathbf{vol} \;=\; g^{\mu\nu}\,\mathbf{vol}\;. \tag{5.70}$$

Damit können wir den zweiten Term aus (5.68) weiter umschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\mu}*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\,dx^\mu\wedge *dx^\nu &= \frac{1}{2}\,g^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}*(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta})\,\mathbf{vol} \\ \text{Aus (4.22.3)} \;\Rightarrow\; &= \frac{1}{2}\,g^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(*\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\beta}) \\ \text{Aus (4.21.2)} \;\Rightarrow\; &= \frac{1}{2}\,g^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}<\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}>\,\mathbf{vol} \\ \text{Produktregel} \;\Rightarrow\; &= g^{\nu\mu}<\boldsymbol{\beta}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{\beta}>\,\mathbf{vol} \\ \text{Aus (4.21.2)} \;\Rightarrow\; &= g^{\nu\mu}*\boldsymbol{\beta}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{\beta}\end{aligned} \tag{5.71}$$

Wie den Anmerkungen zu entnehmen ist, kamen auch hier wieder die mittlerweile mehrfach vorgestellten Methoden zur Manipulation der Schiefprodukte, Umschreibung in Skalarprodukte usw. zum Einsatz. Setzen wir (5.69) und (5.71) in (5.68) ein, erhalten wir

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\tau}^\nu = *f^\nu - \frac{1}{4\pi}\left[*\boldsymbol{\beta}\wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\beta}^\nu + g^{\nu\mu}*\boldsymbol{\beta}\wedge\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{\beta}\right] = *f^\nu\,, \tag{5.72}$$

denn die Hilfsgleichung (5.65.2) besagt, daß der Inhalt der eckigen Klammern verschwindet. Schließlich bilden wir auf beiden Seiten von (5.72) das Hodgedual und erhalten wegen $**f^\nu = -\,f^\nu$ das gewünschte Resultat:

$$*\mathsf{d}*\boldsymbol{\tau}^\nu = \delta\boldsymbol{\tau}^\nu = -f^\nu\,. \tag{5.73}$$

Daß sich die Energie– Impulseigenschaften des elektromagnetischen Feldes über den Kunstgriff der vektorwertigen 1–Formen auch mit Differentialformen beschreiben lassen, sollte nicht darüber hinwegtäuschen, daß wir dem Energie– Impulstensor kein befriedigendes algebraisches Objekt zuordnen konnten. Die Aufstellung der Bilanzgleichungen (5.49) erforderte nämlich war die Wahl eines Koordinatensystemes dx^ν und damit verbunden auch die Festlegung des verwendeten Inertialsystems. Durch diesen Schritt werden die Energieanteile ($\nu = 0$) von den Impulsanteilen ($\nu \neq 0$) getrennt, deren Teilbilanzen jeweils separat mit Differentialformen koordinatenfrei darstellbar sind. Eine vollständig koordinatenfreie Formulierung der Energie– Impulsbilanz des elektromagnetischen Feldes leistet dieses Verfahren jedoch nicht.

Mit (5.49) haben wir gezeigt, daß es möglich ist, den Kalkül der Differentialformen auch zur Beschreibung von Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes heranzuziehen. Allerdings entbehrt das Ergebnis der Eleganz und des Gewinnes an Übersicht, welche bisher mit der Formulierung der Gesetze der Elektrodynamik in dieser Darstellung einhergingen. Der Grund ist die Symmetrie des Energie– Impulstensors, die nicht mit den Eigenschaften von Differentialformen harmoniert. Zu derselben Einschätzung gelangen auch die Teilnehmer des Newsgroup– Threads [BERU98] und stützen so die Aussage, daß Differentialformen physikalische Größen ohne inhärente Schiefsymmetrie nicht notwendigerweise besonders vorteilhaft beschreiben. Offensichtlich handelt es sich bei dem Energie– Impulstensor um einen solchen Fall, und es scheint sinnvoll zu sein, sich bei der Diskussion der Energie– Impulsbilanz auf die konventionelle Tensorschreibweise zu beschränken.

6 Schlußbemerkung

Seit ihrer Entstehung im neunzehnten Jahrundert wurde die Elektrodynamik in unterschiedlichen Darstellungen präsentiert. Maxwell selbst hat sich auf Anraten seines Verlegers der Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten bedient [Ma73], um für ein möglichst breites Publikum verständlich zu sein. Tatsächlich hat Einstein noch 1905 in seiner Arbeit über die Spezielle Relativitätstheorie [Ei05] die Maxwellschen Gleichungen in dieser Form geschrieben.

Maxwell selbst favorisierte Quaternionen als das mathematische Werkzeug seiner Zeit. Diese wurden von William Rowan Hamilton Mitte des neunzehnten Jahrhunderts eingeführt als Resultat seiner Suche nach höherdimensionalen Objekten mit den algebraischen Eigenschaften eines Zahlenkörpers [Ha43]. In Maxwells Veröffentlichungen ist alternativ auch die Quaternionenform seiner Gleichungen beschrieben [Ma73]. Heutzutage herrscht die Meinung vor, daß die Quaternionenschreibweise zu undurchsichtig und komplex ist und nicht gut mit der Struktur der Maxwellschen Gleichungen harmoniert. Die Multiplikation von Quaternionen vereinigt Skalar- und Kreuzprodukt der elementaren Vektorrechnung in einer Art, die bei der Formulierung der Maxwellschen Gleichungen unpraktisch ist.

Die obengenannten Punkte veranlaßten Ende des neunzehnten Jahrhunderts Josiah Willard Gibbs und Oliver Heaviside, ein vereinfachtes Konzept zu entwickeln. Die Quaternionen wurden in einen skalaren und einen dreidimensionalen Vektoranteil zerlegt, wodurch auch Skalar- und Kreuzprodukt getrennt voneinander auftraten. Gibbs und Heaviside entwickelten auf diese Weise unabhängig voneinander den heute gängigen Vektorformalismus inklusive der Differentialoperatoren grad, div und rot [Gib93]. In Bezug auf die Elektrodynamik entstand so [Hv93] die elementare Form (2.1) der Maxwellschen Gleichungen, die wir in Kapitel 2 beschrieben haben und die in dieser Gestalt auch heute noch Gegenstand der Grundlagenphysik ist.

Kurz nach Einsteins Veröffentlichung der Relativitätstheorie im Jahr 1905 erkannte Hermann Minkowski, daß sich die relativistische Dynamik auf natürliche Weise in ein vierdimensionales „Raum– Zeit– Kontinuum“ einbetten läßt [Mi09]. Dieses Kontinuum ist ein Vektorraum, in dem die drei Raumdimensionen zusammen mit der Zeit ein vierdimensionales Ganzes bilden. Durch die Minkowskimetrik (A.10) erhält das Kontinuum seine spezielle Struktur und trägt daher den Namen „Minkowskiraum“. Die Minkowskimetrik enthält imaginäre Vektoren und ist somit pseudoeuklidisch. Orthonormale Basissysteme, in denen der metrische Tensor mit $g_{\mu\mu} = \pm\delta_{\mu\nu}$ Diagonalgestalt besitzt, werden durch Lorentztransformationen ineinander überführt. Wenn diese Basiswechsel Raum- und Zeitanteile miteinander kombinieren, beschreiben sie physikalisch den Übergang in ein anderes Inertialsystem. Durch die Einführung von Tensoren über diesem Grundvektorraum (Vierertensoren) und einer konsequenten Formulierung aller Größen und Gesetze in Viererschreibweise lassen sich nicht nur die relativistische Mechanik, sondern auch die Elektrodynamik und die Maxwellschen Gleichungen so formulieren, daß ihre Invarianz gegenüber Lorentztransformationen offenkundig wird (3.26). Damit entfällt die Notwendigkeit, die Lorentzinvarianz durch expliziten Wechsel des Inertialsystems zu überprüfen, was zur Folge hat, daß die bekannten Formeln der speziellen Lorentztransformation inklusive β– und γ– Faktoren in diesem Text nicht vorkommen.

Die Viererschreibweise (3.26) der Maxwellschen Gleichungen enthält zwar die elektromagnetischen Feldgrößen in invarianter Form, ist aber als Komponentendarstellung realisiert und somit kein zufriedenstellender lorentzinvarianter Ersatz für die elementaren Maxwellgleichungen (2.1). Diese selbst sind zwar nur invariant gegenüber Basiswechseln im Ortsraum, allerdings erstreckt sich diese Invarianz auch auf die verwendeten Differentialoperatoren, was die Gleichungen in den Ortsvariablen komponentenfrei macht. Zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts arbeitete Élie Joseph Cartan an Lösungsmethoden für Differentialgleichungen, die auf der Überführung in eine generische und invariante Form beruhten. Seine Theorie der Differentialformen entstand durch Anwendung der Graßmann– Algebra auf lineare Differentialgleichungen mit mehreren Variablen und diente später als Werkzeug in der Differentialgeometrie und der Allgemeinen Relativitätstheorie [Ca46]. Angewandt auf die Elektrodynamik ermöglichte sie die kompakte und komponentenfreie Schreibweise (5.20) der Maxwellschen Gleichungen, die wir in Kapitel 5 vorgestellt haben.

Differentialformen gelten seit den Fünfziger Jahren als zeitgemäßes Werkzeug bei der Beschreibung klassischer Feldtheorien. Abgesehen von den Maxwellschen Gleichungen hat man sich ihrer beispielsweise in der Allgemeinen Relativitätstheorie und bei der Yang Mills Theorie der Elektroschwachen Wechselwirkung bedient. Auch in vereinheitlichten Feldtheorien, die durch eine Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie die Gravitation mit der Elektrodynamik zu verschmelzen versuchen, ist der Einsatz von Differentialformen gebräuchlich. Mit diesem mathematischen Formalismus vertraut zu sein, ist somit eine notwendige Voraussetzung zum Verständnis dieser Theorien, und vielleicht ist der vorliegene Text hierfür ein erster Schritt.

Anhang A: Grundlagen

In diesem Anhang werden zur besseren Nachvollziehbarkeit der Rechnungen einige elementare Regeln und Definitionen rekapituliert, die als mathematisches Standardrepertoire den Argumentationsfluß an Ort und Stelle unnötig unterbrochen hätten.

A.1 Vektoranalysis

Die hier aufgelisteten Gleichungen der Vektoranalysis sind Thema jeder einschlägigen Vorlesung bzw. Lehrbuchs:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = 0 \tag{A.1.1}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{A} = 0 \tag{A.1.2}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\underline{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\underline{A} - \Delta\underline{A} \tag{A.1.3}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \Delta\Phi = \left[\frac{\partial^2}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x^2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x^3}^2}\right]\Phi \tag{A.1.4}$$

$$\operatorname{div}\left[\,\underline{A}\times\underline{B}\,\right] = (\,\underline{B}\cdot\operatorname{rot}\underline{A}\,) - (\,\underline{A}\cdot\operatorname{rot}\underline{B}\,) \tag{A.1.5}$$

$$\operatorname{grad}(\,\underline{A}\cdot\underline{B}\,) = (\,\underline{A}\cdot\operatorname{grad}\,)\underline{B} + (\,\underline{B}\cdot\operatorname{grad}\,)\underline{A} + \underline{A}\times\operatorname{rot}\underline{B} + \underline{B}\times\operatorname{rot}\underline{A} \tag{A.1.6}$$

$$\Box\Phi = \left[\partial^2/\partial(ct)^2 - \Delta\right]\Phi \tag{A.1.7}$$

Der D'Alembertoperator $\Box$ in Gleichung (A.1.7) ist die naheliegende und in der Physik übliche Erweiterung des Laplaceoperators Δ aus Gleichung (A.1.4) im Minkowskiraum.

A.2 Basiswechsel im Minkowskiraum

Da die Darstellung des vierdimensionalen Raum- Zeitkontinuums in der Literatur nicht einheitlich ist [Ja83], [Gre82], stellen wir die von uns bevorzugte Schreibweise in einem kurzen Abriß vor. Die besondere Struktur des Minkowskiraumes wird durch die Metrik (3.1) festgelegt, welche daher in der mathematischen Formulierung physikalischer Gesetze explizit in Erscheinung treten soll wie z.B. durch die Indexstellung kontra– und kovarianter Tensorkomponenten. Aus diesem Grund ist die gelegentlich anzutreffende Verwendung komplexer Vierervektoren mit imaginärer zeitartiger Komponente für uns ungeeignet, da hier das strukturbildende Element von der Metrik auf die komplexe Darstellung verlagert wird. Wir werden stattdessen mit reellen Vierervektoren arbeiten, in deren Notation der Weltvektor folgende Gestalt besitzt:

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} . \tag{A.2}$$

Kontra– und kovariantes Verhalten läßt sich recht anschaulich im Rahmen von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten analysieren, siehe [BM94]. Die Auseinandersetzung mit diesem mathematischen Zweig wäre allerdings für unsere Zwecke ein unsinniger und für den Leser verwirrender Aufwand, so daß wir uns hier auf die in der Physik übliche Darstellung des Ricci– Kalküls beschränken. In diesem Kalkül werden kontra– und kovariante Komponenten streng durch die Stellung der Indizes unterschieden. Die Expansionsfaktoren eines Vektors $\underline{y}$ bezüglich der Basis $\underline{u}_\mu$ tragen hochgestellte Indizes und werden als kontravariante Komponenten dieses Vektors bezeichnet:

$$\underline{y} = y^\mu \underline{u}_\mu \,. \tag{A.3}$$

Wir verwenden an dieser Stelle die allgemeine Schreibweise für Vektoren und nicht die Vierernotation, da die weiteren Überlegungen für jeden Vektorraum $\mathbb{V}^n$ gelten und sich in dieser Darstellung besser lesbar formulieren lassen. Als nächstes betrachten wir den zum Grundvektorraum $\mathbb{V}^n$ zugeordneten Dualraum $[\mathbb{V}^n]^*$ der linearen Funktionale, also der Abbildungen von Vektoren aus $\mathbb{V}^n$ auf Elemente des Koeffizientenkörpers $\mathbb{R}$:

$$\chi : \mathbb{V}^n \;\to\; \mathbb{R} \,. \tag{A.4}$$

Um nachzuvollziehen, welche Basisabbildungen χ^μ in diesem Dualraum durch die Vektorbasis $\underline{u}_\mu$ induziert werden, entwickeln wir den Argumentvektor $\underline{y}$ in der Vektorbasis und nutzen anschließend die Linearität von χ aus:

$$\chi(y^\mu \underline{u}_\mu) \;=\; y^\mu \, \chi(\underline{u}_\mu) \;=:\; \chi^\mu(\underline{y}) \, x_\mu \,. \tag{A.5}$$

Im letzten Schritt haben wir folgende Festlegungen getroffen:

$$\begin{aligned} x_\mu &:= \chi(\underline{u}_\mu) && \text{Koeffizient} \\ y^\mu &=: \chi^\mu(\underline{y}) && \text{Basisabbildung}\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Die vom Argument $\underline{y}$ unabhängigen Anteile aus (A.5) werden als Koeffizienten der Abbildung χ interpretiert, während in den y^μ das Resultat der Basisabbildungen χ^μ

zu sehen ist. Die Koeffizienten x_μ werden als kovariante Komponenten der Abbildung χ bezeichnet und tragen tiefgestellte Indizes, denn nach (A.5) können wir schreiben:

$$\chi(\underline{y}) = x_\mu \chi^\mu(\underline{y})\,. \tag{A.7}$$

Die einzelnen Summanden aus (A.7) sind linear unabhängig, denn das Funktional χ verschwindet für beliebige Argumentvektoren $\underline{y}$ nur, wenn sämtliche Koeffizienten x_μ verschwinden. Gemäß (A.5) existiert zu jedem Basisvektor aus $\mathbb{V}^n$ eine Basisabbildung in $[\mathbb{V}^n]^*$, wodurch beide Vektorräume dieselbe Dimension n besitzen. Damit ist der Dualraum zum Grundvektorraum isomorph, aber er ist nicht mit ihm identisch. Um ein Funktional χ einem bestimmten Vektor $\underline{x}$ zuordnen zu können, benötigen wir einen konkreten Isomorphismus, der eine solche eindeutige Identifikation gestattet. Ein in $\mathbb{V}^n$ existierendes Skalarprodukt $(\,\cdot\,)$ kann als ein solcher Isomorphismus verwendet werden, denn es verknüpft Funktionale und Vektoren folgendermaßen:

$$\chi(\underline{y}) := (\,\underline{x} \cdot \underline{y}\,)\,. \tag{A.8}$$

Jetzt ist es möglich, die kovarianten Komponenten x_μ dem Vektor $\underline{x}$ selbst zuordnen:

$$x_\mu = \chi(\underline{u}_\mu) = (\,\underline{x} \cdot \underline{u}_\mu\,) = x^\nu\,(\,\underline{u}_\nu \cdot \underline{u}_\mu\,) \tag{A.9}$$

In einer etwas saloppen Sprechweise spricht man von den x_μ als den „kovarianten Komponenten des Vektors $\underline{x}$“. Im Minkowskiraum legt die Minkowskimetrik die Skalarprodukte der einzelnen Basisvektoren untereinander fest:

$$(g_{\mu\nu}) := \big((\,\underline{u}_\mu \cdot \underline{u}_\nu\,)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

Die Komponenten des inversen metrischen Tensors bezeichnen wir mit hochgestellten Indizes:

$$(g^{\mu\nu}) := \underline{\underline{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der Minkowskimetrik ist diese zu sich selbst invers. Mit Hilfe des metrischen Tensors (A.10) und seinem Inversen (A.11) lassen sich kontra- und kovariante Komponenten bei Bedarf ineinander umrechnen:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}\, x^\nu \tag{A.12.1}$$

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{A.12.2}$$

Der mathematisch– physikalische Fachjargon für diese Operationen lautet: „Die Indizes werden mit Hilfe von $g_{\mu\nu}$ oder $g^{\mu\nu}$ herunter– bzw. heraufgezogen“.

Aus der Diagonalgestalt der Minkowskimetrik (A.10) geht hervor, daß die Basisvektoren $\underline{u}_\mu$ aufeinander senkrecht stehen und normiert sind. Die negativen Diagonalelemente bewirken jedoch, daß die Minkowskimetrik nicht positiv definit ist und daher nicht unter die euklidischen, sondern unter die pseudoeuklidischen Metriken fällt. Je nach Vorzeichen ihres Quadrates bezeichnen wir die Basisvektoren als

$$(\,\underline{u}_\mu \cdot \underline{u}_\mu\,) = 1 : \quad \text{reell} \tag{A.13.1}$$

$$(\,\underline{u}_\mu \cdot \underline{u}_\mu\,) = -1 : \quad \text{imaginär}\,, \tag{A.13.2}$$

und die Differenz zwischen der Anzahl reeller und imaginärer Vektoren nennen wir die Signatur. Der Übergang zwischen zwei Inertialsystemen erfolgt durch eine Lorentztransformation, welche im Minkowskiraum einem Wechsel der Basis entspricht. Wir bezeichnen die zur Lorentztransformation gehörige Basiswechselmatrix mit $\underline{\underline{\Lambda}}$:

$$\underline{u}'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, \underline{u}_\nu\,. \tag{A.14}$$

Lorentztransformationen überführen orthonormale Basen in andere orthonormale Basen mit gleicher Signatur und Orientierung, wodurch $\underline{\underline{\Lambda}}$ eine zusätzliche Bedingung erfüllen muß, die wir aus der Transformationsvorschrift des metrischen Tensors ableiten:

$$\underline{\underline{g}}' = (\,\Lambda_{\mu'}{}^\mu\, \Lambda_{\nu'}{}^\nu\, g_{\mu\nu}\,) = \underline{\underline{\Lambda}}\; \underline{\underline{g}}\; \underline{\underline{\Lambda}}^T\,. \tag{A.15}$$

Da die tansformierte Basis ebenfalls orthonormal ist und weil Signatur und Orientierung sich nicht geändert haben, bleibt die Metrik bei dieser Transformation erhalten ($\underline{\underline{g}}' = \underline{\underline{g}}$), weswegen wir schreiben können

$$\underline{\underline{\Lambda}}\; \underline{\underline{g}}\; \underline{\underline{\Lambda}}^T = \underline{\underline{g}}\,. \tag{A.16}$$

Die Eigenschaft (A.16) ist eine verallgemeinerte Orthogonalitätsbedingung an die Matrix $\underline{\underline{\Lambda}}$, die dem pseudoeuklidischen Charakter der Minkowskimetrik Rechnung trägt. Für eine euklidische Metrik reduziert sich die Bedingung (A.16) auf die bekannte Orthogonalitätsrelation für Matrizen, da in diesem Fall $\underline{\underline{g}} = \mathbb{1}$ gilt:

$$\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{\Lambda}}^T = \mathbb{1}\,. \tag{A.17}$$

Wir betrachten nun die durch die Basiswechselmatrix generierten Transformationsformeln für ko– und kontravariante Vektorkomponenten. Da wir hierbei keinen Gebrauch von den speziellen Eigenschaften des Minkowskiraumes machen werden, gelten die Resultate für einen beliebigen Basiswechsel im Vektorraum $\mathbb{V}^n$. Das Transformationsverhalten kontravarianter Komponenten ergibt sich aus der Basisdarstellung des Vekors $\underline{x}$ in der alten und der neuen Basis, vgl. (A.3):

$$\underline{x} \;=\; x'^{\,\mu}\,\underline{u}'_\mu \;=\; x'^{\,\mu}\,\Lambda_\mu{}^\nu\,\underline{u}_\nu \;=\; (\underline{\underline{\Lambda}}^T)^\nu{}_\mu\,x'^{\,\mu}\,\underline{u}_\nu \;=\; x^\nu\underline{u}_\nu \tag{A.18}$$

Die letzten beiden Rechenschritte in (A.18) werten wir komponentenweise aus und erhalten

$$x'^{\,\mu} \;=\; [(\underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1}]^\mu{}_\nu\,x^\nu\,. \tag{A.19}$$

Die Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten ist also nicht die Basiswechselmatrix selbst, sondern deren transponiertes Inverses. Man sagt auch „die Komponenten transformieren sich kontragredient“ (gegenläufig), wodurch auch die Bezeichnung „Kontravariant“ verständlich wird. Die Transformationsvorschrift für kovariante Komponenten leiten wir aus (A.9) ab, indem wir nach (A.14) die neuen Basisvektoren $\underline{u}'_\mu$ in der alten Basis darstellen:

$$x'_\mu \;=\; (\,\underline{x}\cdot\underline{u}'_\mu\,) \;=\; (\,\underline{x}\cdot\,\Lambda_\mu{}^\nu\,\underline{u}_\nu\,) \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu\,(\,\underline{x}\cdot\underline{u}_\nu\,) \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu\,x_\nu\,. \tag{A.20}$$

Kovariante Komponenten transformieren sich also folgendermaßen:

$$x'_\mu \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu\,x_\nu\,. \tag{A.21}$$

In diesem Fall heißt es „die Komponenten transformieren sich kogredient“ (mitläufig). Schließlich fassen wir beide Transformationsvorschriften noch einmal zusammen und präsentieren sie in der dem Ricci - Kalkül gemäßen Form:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \, x_\nu \tag{A.22.1}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{A.22.2}$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [(\underline{\underline{\Lambda}}^T)^{-1}]^\mu{}_\nu \,. \tag{A.22.3}$$

Die Verwendung der abkürzenden Schreibweise (A.22.3) für die Transformation der kovarianten Komponenten ist in der Mathematik üblich, weil die Gleichungen dadurch deutlich lesbarer werden. Im Falle des Minkowskiraumes sind die Transformationsmatrizen für kontra– und kovariante Komponenten verschieden, wodurch die strenge Beachtung der Indexstellung unumgänglich ist. Da bei der Aufstellung einer Lorentztransformation der Vergleich von Vektorkomponenten wie z.B. den Koordinaten des Weltvektors viel naheliegender ist als die Umrechnung von Basisvektoren, wird in der physikalischen Literatur für gewöhnlich $\Lambda^\mu{}_\nu$ angegeben und nicht die Basiswechselmatrix $\Lambda_\mu{}^\nu$ selbst.

A.3 Der ε - Tensor

Um den Begriff des ε - Tensors haben sich überraschend viele Sprechweisen und Darstellungsformen gebildet. Der Name „Levy-Chivita Tensor“ steht für ein System von Zahlen $\varepsilon^{i_1 \cdots i_n}$, das dem untenstehenden Bildungsgesetz (A.23) gehorcht. Diese Zahlen verhalten sich unter einer recht allgemeinen Klasse von Transformationen wie Konstanten, so daß manche Autoren konsequenterweise die Bezeichnung „Levy-Chivita Symbol“ bevorzugen. In anderen Zusammenhängen ist von „Relativen Tensoren eines bestimmten Gewichtes“ die Rede, für die Potenzen von Volumenmaßen in die Basistransformationsvorschriften mit eingehen [MW70]. Das bekannte Beispiel des Kreuzproduktes zeigt, daß mit Hilfe des ε - Tensors definierte Objekte unter gewissen Symmetrieoperationen wie Spiegelungen oder Paritätswechsel ein spezielles Verhalten zeigen. Verwirrenderweise werden diese Größen mit der Bezeichung „Pseudovektor“ oder „Pseudotensor“ belegt und vermitteln so den Eindruck, daß unter der Einwirkung des ε - Tensors der herkömmliche Vektor– bzw. Tensorcharakter verlorengeht.

Diese Vorstellung entsteht, wenn nicht präzise zwischen aktiven Symmetriemanipulationen an bestimmten Objekten einerseits und passiven Basistransformationen andererseits unterschieden wird. Obwohl die Klassifizierung von Größen nach ihrem Verhalten unter Spiegelungen und Paritätswechsel bei der Interpretation physikalischer Zusammenhänge einen hohen Stellenwert besitzt, liegt der Schwerpunkt für uns in der Herausarbeitung des Tensorcharakters aller untersuchten Gesetze. Aus diesem Grund interessieren wir uns allein für die beim Basiswechsel durchgeführten passiven Transformationen, welche für sämtliche Größen einer Gleichung verbindlich sind. Wir verfahren daher mit den $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ wie mit gewöhnlichen Tensorkomponenten. Zunächst werden diese in einer Ausgangsbasis festgelegt:

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n} := \begin{cases} 1 & (i_1\cdots i_n \text{ ist gerade Permutation von } 1\cdots n) \\ -1 & (i_1\cdots i_n \text{ ist ungerade Permutation von } 1\cdots n) \\ 0 & (i_1\cdots i_n \text{ ist keine Permutation von } 1\cdots n) \end{cases} \tag{A.23}$$

Diese Komponenten sind total antisymmetrisch, das heißt, bei Vertauschung zweier beliebiger Indizes ändern sie ihr Vorzeichen. Wir untersuchen nun das Verhalten der $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ unter einer Basistransformation

$$\underline{u}_{j'} = A_{j'}{}^{i}\, \underline{u}_i \tag{A.24.1}$$

$$x^{j'} = A^{j'}{}_{i}\, x^i \tag{A.24.2}$$

$$A^{j'}{}_{i} = [(\underline{\underline{A}}^T)^{-1}]^{j'}{}_{i}\,. \tag{A.24.3}$$

An der Indexstellung der Matritzen kann abgelesen werden, ob es sich um die Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten oder um die Basiswechselmatrix selbst handelt, vgl. hierzu den vorhergehenden Anhang A.2. Die transformierten Komponenten des ε- Tensors lauten:

$$\varepsilon'^{j'_1\cdots j'_n} = A^{j'_1}{}_{i_1}\cdots A^{j'_n}{}_{i_n}\varepsilon^{i_1\cdots i_n} \tag{A.25}$$

Den $'$ in ε' benötigen wir als Markierung der transformierten Komponenten zusätzlich zu den gestrichenen Indizes. Auch nach der Transformation bleibt der ε- Tensor total antisymmetrisch, was wir exemplarisch für die ersten beiden Indizes j'_1 und j'_2 zeigen wollen:

$$\varepsilon'^{j'_2 j'_1\cdots j'_n} = A^{j'_2}{}_{i_1}A^{j'_1}{}_{i_2}\cdots A^{j'_n}{}_{i_n}\varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_n} \tag{A.26.1}$$

$$= A^{j'_2}{}_{i_2}A^{j'_1}{}_{i_1}\cdots A^{j'_n}{}_{i_n}\varepsilon^{i_2 i_1\cdots i_n} \tag{A.26.2}$$

$$= -A^{j'_1}{}_{i_1}A^{j'_2}{}_{i_2}\cdots A^{j'_n}{}_{i_n}\varepsilon^{i_1 i_2\cdots i_n} \tag{A.26.3}$$

$$= -\varepsilon'^{j'_1 j'_2\cdots j'_n} \tag{A.26.4}$$

In Gleichung (A.26) wurden folgende Rechenoperationen vorgenommen:

- In (A.26.2) wurden die Indizes i_1 und i_2 wechselseitig umbenannt.
- In (A.26.3) wurden in den ε - Komponenten die Indizes i_1 und i_2 vertauscht und so das zusätzliche Minuszeichen erzeugt.

Aufgrund der Antisymmetrie verschwinden nur diejenigen Komponenten von ε' nicht, bei denen die Indizes $j'_1 \cdots j'_n$ eine Permutation von $1 \cdots n$ darstellen. In diesem Fall können wir durch Vertauschung die Zeilenindizes der Transformationsmatrizen in aufsteigender Reihenfolge anordnen:

$$\varepsilon'^{j'_1 \cdots j'_n} = \varepsilon^{j'_1 \cdots j'_n} A^1{}_{i_1} \cdots A^n{}_{i_n} \varepsilon^{i_1 \cdots i_n} . \tag{A.27}$$

Der Faktor $\varepsilon^{j'_1 \cdots j'_n}$ berücksichtigt die durch diesen Prozeß generierten Vorzeichenwechsel. Die Summe über die Matrixkomponenten auf der rechten Seite von Gleichung (A.27) ist eine Darstellung der Determinante von $\underline{\underline{A}}$. Damit lautet

$$\varepsilon'^{j'_1 \cdots j'_n} = \left| (\underline{\underline{A}}^{-1})^T \right| \varepsilon^{j'_1 \cdots j'_n} = \frac{1}{|\underline{\underline{A}}|} \varepsilon^{j'_1 \cdots j'_n} . \tag{A.28}$$

Offensichtlich bleibt die Struktur des ε - Tensors nach einem Basiswechsel bis auf einen Vorfaktor erhalten. Wenn es sich bei der Basiswechselmatrix um eine orthogonale Matrix mit positiver Determinante handelt

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T \qquad |\underline{\underline{A}}| = +1 , \tag{A.29}$$

dann ändern sich die $\varepsilon^{i_1 \cdots i_n}$ überhaupt nicht und verhalten sich wie Konstanten. Bei allgemeineren Transformationen, welche Orientierung und Länge der Basisvektoren verändern oder die Basis schiefwinklig machen, wird dieses durch die Determinante der Transformationsmatrix in Gleichung (A.28) automatisch berücksichtigt.

Anhang B: Bestimmung der Eichfunktion

Ein elektromagnetisches Potential ($\underline{A}'$, Φ'), das der Lorentzeichung genügt, muß die Differentialgleichung

$$\operatorname{div}\underline{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi' = 0 \tag{B.1}$$

erfüllen. Für ein vorgegebenes Feld $\underline{E}$ und $\underline{B}$ sei ein Potential ($\underline{A}$, Φ) bekannt, das nicht der Lorentzeichung (B.1) entspricht. In Kapitel 2 haben wir behauptet, daß sich immer eine Eichfunktion $f(\underline{x}, t)$ finden läßt, mit der das modifizierte Potential

$$\underline{A}' = \underline{A} + \operatorname{grad} f \tag{B.2.1}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f \tag{B.2.2}$$

der Lorentzeichung genügt. Beide Gleichungen (B.2) in (B.1) eingesetzt ergeben

$$\operatorname{div}\underline{A} + \Delta f + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f = 0 \tag{B.3}$$

Nach geeigneter Umstellung der Terme gewinnt man eine Differentialgleichung für $f(\underline{x}, t)$:

$$\Box f(\underline{x}, t) = \operatorname{div}\underline{A}(\underline{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\underline{x}, t)\,. \tag{B.4}$$

Diese inhomogene Wellengleichung muß unter den für die Felder vorgegebenen physikalischen Randbedingungen gelöst werden; eine Standardaufgabe, die sich mit Hilfe Greenscher Funktionen auf anschauliche Weise durchführen läßt [Ja83]. Die im Unendlichen verschwindende Lösung von (B.4) lautet

$$f(\underline{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{g(\underline{x}', t - \frac{1}{c}\,|\underline{x} - \underline{x}'|)}{|\underline{x} - \underline{x}'|}\, d^3x' \tag{B.5.1}$$

$$g(\underline{x}, t) = \operatorname{div}\underline{A}(\underline{x}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\underline{x}, t) \tag{B.5.2}$$

und beschreibt die retardierte Wirkung der einzelnen Elemente des Quellterms $g(\underline{x}, t)$ auf die Eichfunktion $f(\underline{x}, t)$. Die Anpassung an die physikalischen Randbedingungen wird durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung $\Box f(\underline{x}, t) = 0$ erzielt.

Anhang C: Zum Maxwellschen Spannungstensor

Dieser Anhang enthält die zur Herleitung der Bilanzgleichung für die Impulsdichte $\underline{P}$ des elektromagnetischen Feldes notwendigen Rechnungen. Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Darstellung (2.18) des Poyntingvektors

$$\underline{P} \;:=\; \frac{1}{c^2}\,\underline{S} \;=\; \frac{1}{4\pi c}\,\underline{E}\times\underline{B}\,. \tag{C.1}$$

Wir bilden von dieser Gleichung die zeitliche Ableitung und formen den entstehenden Ausdruck mit Hilfe der Maxwellgleichungen (2.1.2) und (2.1.4) weiter um:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\underline{P} \;&=\; \frac{1}{4\pi c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\underline{E}\times\underline{B}+\underline{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\right]\\ &=\; \frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{rot}\,\underline{B}\times\underline{B}+\mathrm{rot}\,\underline{E}\times\underline{E}\right]-\frac{1}{c}\,\underline{j}\times\underline{B}\,.\end{aligned} \tag{C.2}$$

Jetzt fügen wir künstlich Terme zu diesem Ausdruck hinzu, indem wir beide Seiten der Maxwellgleichung (2.1.1) sowie den nach (2.1.3) verschwindenden Term $\underline{B}\,\mathrm{div}\underline{B}$ addieren:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\underline{P} \;&=\; \frac{1}{4\pi}\left[\underline{E}\,\mathrm{div}\underline{E}+\underline{B}\,\mathrm{div}\underline{B}+\mathrm{rot}\,\underline{E}\times\underline{E}+\mathrm{rot}\,\underline{B}\times\underline{B}\right]\\ &-\; \rho\underline{E}-\frac{1}{c}\,\underline{j}\times\underline{B}\,.\end{aligned} \tag{C.3}$$

Um zu einer Bilanzgleichung zu gelangen, müssen wir den in den eckigen Klammern stehenden Ausdruck als Divergenz einer Stromdichte für die jeweilige Impulskomponente interpretieren. Hierfür formen wir Gleichung (C.3) weiter um, indem wir die Identität (A.1.6) für den Fall $\underline{B}=\underline{A}$ verwenden:

$$\mathrm{rot}\,\underline{A}\times\underline{A} \;=\; (\,\underline{A}\cdot\mathrm{grad}\,)\underline{A}-\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,A^2\,. \tag{C.4}$$

Mit dieser Identität können wir die Rotationsterme ersetzen. Da $\underline{E}$ und $\underline{B}$ im Ausdruck innerhalb der eckigen Klammer symmetrisch auftreten, genügt es, dieses exemplarisch für die $\underline{E}$- Terme zu demonstrieren. Für die $\underline{B}$- Terme gelten die Umformungen dann analog.

$$\underline{E}\,\mathrm{div}\underline{E}+\mathrm{rot}\,\underline{E}\times\underline{E}=\underline{E}\,\mathrm{div}\underline{E}+(\,\underline{E}\cdot\mathrm{grad}\,)\underline{E}-\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,E^2\,. \tag{C.5}$$

Wir betrachten nun die Komponente i dieser Vektorgleichung und stellen das Skalarprodukt sowie die Differentialoperatoren in einer Orthonormalbasis dar:

$$\begin{aligned}
\Big[\underline{E}\,\mathrm{div}\underline{E} + \mathrm{rot}\,\underline{E} \times \underline{E}\Big]^{(i)} &= E^i(\frac{\partial}{\partial x^j}E^j) + (E^j\frac{\partial}{\partial x^j})E^i - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}E^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(E^iE^j) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}E^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}(E^iE^j - \frac{1}{2}\,\delta^{ij}E^2)\,.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Der Ausdruck δ^{ij} in der letzten Zeile ist das Kroneckersymbol

$$\delta^{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad i \neq j \end{cases}\,, \tag{C.7}$$

mit dessen Hilfe wir den zweiten Term der rechten Seite künstlich in die Divergenzbildung miteinbezogen haben. Die Divergenz wirkt somit auf die Komponenten eines symmetrischen Tensors

$$T_E^{ij} = T_E^{ji} = -\frac{1}{4\pi}(E^iE^j - \frac{1}{2}\,\delta^{ij}E^2)\,. \tag{C.8}$$

Der Faktor $1/4\pi$ ist der Vorfaktor der eckigen Klammer in (C.3). Der zusätzliche Vorzeichenwechsel bewirkt, daß die Impulsstromdichte später in der Bilanzgleichung aus Sicht des Feldimpulses gezählt wird. Die komponentenfreie Darstellung dieses Tensors lautet

$$\boldsymbol{T}_E = -\frac{1}{4\pi}\left[\underline{E} \otimes \underline{E} - \frac{1}{2}E^2\,\mathbb{1}\right]. \tag{C.9}$$

Das Symbol $\otimes$ bezeichnet das tensorielle Produkt zweier Vektoren, dessen Komponenten das kartesische Produkt der einzelnen Vektorkomponenten sind. Für den magnetischen Teil der Stromdichte des Feldimpulses erhalten wir einen analogen Ausdruck in $\underline{B}$, und somit lautet der Spannungstensor des gesamten Feldes:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_E + \boldsymbol{T}_B = -\frac{1}{4\pi}\left[\underline{E} \otimes \underline{E} + \underline{B} \otimes \underline{B} - \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\,\mathbb{1}\right]. \tag{C.10}$$

Schließlich können wir die Bilanzgleichung (C.3) in die gewohnte Form bringen, indem wir sie für eine einzelne Impulskomponente i formulieren und die Bezeichung $\boldsymbol{T}^{(i)}$ für die $i-$te Zeile des Maxwellschen Spannungstensors einführen:

$$\frac{\partial}{\partial t}P^i + \mathrm{div}\,\boldsymbol{T}^{(i)} = -\Big[\rho\underline{E} + \frac{1}{c}\,\underline{j} \times \underline{B}\Big]^i\,. \tag{C.11}$$

Anhang D: Zu Differentialformen

In diesem Anhang werden einige Rechnungen aus der Algebra und der Analysis der Cartanschen Differentialformen im Detail präsentiert. Wir orientieren uns hierbei an den Inhalten von Standardvorlesungen und Lehrbüchern, auf die wir gegebenenfalls in einer Referenz verweisen. Darüberhinaus treffen wir gewisse Vereinbarungen bezüglich der Schreibweise von Basismonomen einer Differentialform $\boldsymbol{\alpha}$ und denjenigen der dualen Form $*\boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\alpha} & : & dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} & \text{Basismonome} \qquad \text{(D.1.1)} \\ *\boldsymbol{\alpha} & : & \backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}] & \text{Komplementäre Basismonome} \qquad \text{(D.1.2)} \end{array}$$

Basismonom und komplementäres Basismonom ergänzen sich zur Volumenform $\mathbf{vol}$. Die hier auftretenden Indexgruppen schreiben wir auf folgende Weise:

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\alpha} & : & \{i_1 \cdots i_p\} & \text{Anzahl: } p \qquad \text{(D.2.1)} \\ *\boldsymbol{\alpha} & : & \backslash\{i_1 \cdots i_p\} & \text{Anzahl: } n-p \qquad \text{(D.2.2)} \end{array}$$

Ist im Basismonom ein zusätzlicher Basisvektor dx^k miteinsortiert oder fehlt ein Basisvektor dx^k, bezeichnen wir dies als

$$\begin{array}{lcl} (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \cup dx^k & : & \text{Zusätzlicher Basisvektor } dx^k \qquad \text{(D.3.1)} \\ (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \backslash dx^k & : & \text{Fehlender Basisvektor } dx^k \qquad \text{(D.3.2)} \end{array}$$

In den Indexgruppen kennzeichnen wir zusätzliche bzw. fehlende Indizes k durch

$$\begin{array}{lcl} \{i_1 \cdots i_p\}, k & : & k \text{ kommt hinzu} \qquad \text{(D.4.1)} \\ \{i_1 \cdots i_p\}, \not{k} & : & k \text{ fällt weg}. \qquad \text{(D.4.2)} \end{array}$$

Darüberhinaus definieren wir über diesen Indexgruppen zwei Zählfunktionen:

- *Zahl von Vertauschungen: r*

  Für die Rechnungen dieses Anhanges ist es erforderlich, die Schiefprodukte mehrerer Basismonome $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ bzw. Basisvektoren dx^k zu bilden und anschließend sämtliche Basisvektoren im Sinne der Volumenformreihenfolge $\mathbf{vol}$ anzuordnen. Die Anzahl der dafür notwendigen Vertauschungen muß hierbei zur Berechnung des entstehenden Vorzeichens nachverfolgt werden. Wir bezeichnen die Anzahl der Vertauschungen mit denen der Ausdruck $dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_q}$ von rechts oder von links in das Basismonom $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ einsortiert wird mit

$$
\begin{aligned}
r(\{i_1 \cdots i_p\}|\{k_1 \cdots k_q\}): &\quad \text{Einsortierung der } \{k_1 \cdots k_q\} \text{ von rechts} \\
r(\{k_1 \cdots k_q\}|\{i_1 \cdots i_p\}): &\quad \text{Einsortierung der } \{k_1 \cdots k_q\} \text{ von links.}
\end{aligned}
$$

Beide Formen lassen sich ineinander umrechnen, indem die beiden Indexgruppen vollständig durchgetauscht und die dabei entstehenden zusätzlichen pq Vorzeichenwechsel ebenfalls registriert werden:

$$
r(\{k_1 \cdots k_q\}|\{i_1 \cdots i_p\}) = pq + r(\{i_1 \cdots i_p\}|\{k_1 \cdots k_q\})\,. \tag{D.5}
$$

– *Zahl imaginärer Vektoren:* σ
Bei der Anwendung des Hodge Operators sind zusätzlich zu den Vertauschungen der Basisvektoren noch die Vorzeichen zu beachten, welche durch die Skalarproduktbildung in (4.21.2) entstehen. Bei dieser Definition des Hodge Operators bezeichnen wir beispielsweise die Anzahl der imaginären Vektoren des dualen Basismonoms mit

$$
\sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}): \text{ Anzahl imaginärer Vektoren} \tag{D.6}
$$

Sämtliche imaginären Vektoren addieren sich zur Gesamtzahl N_I der betreffenden Metrik:

$$
\sigma(\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}) = \sigma(\{i_1 \cdots i_n\}) = N_I\,. \tag{D.7}
$$

Die Besonderheit der Vorzeichenzählung bringt es mit sich, daß alle Zählfunktionen äquivalent sind, welche sich im Ergebnis um einen geraden Betrag unterscheiden. Diese Äquivalenz beruht auf der Tatsache, daß sich eine gerade Anzahl von Vorzeichen weghebt. Auf diese Weise zerfallen alle Zählfunktionen in zwei Äquivalenzklassen, die sich entweder auf die Zahl 1 oder auf die Zahl 0 reduzieren lassen. Als Konsequenz sind gelegentlich unerwartete Vereinfachungen möglich wie z.B.

$$
r_1 - r_2 = r_1 + r_2 - 2r_2 \Leftrightarrow r_1 + r_2 \tag{D.8}
$$

$$
r_1 + p(p+1) \Leftrightarrow r_1\,. \tag{D.9}
$$

Im zweiten Fall (D.9) ist nämlich entweder p oder $p+1$ geradzahlig. Im Zuge der folgenden Rechnungen werden wir gelegentlich Umformungen dieser Art durchführen können.

Mit Hilfe der Zählfunktionen r und σ läßt sich beispielsweise die Wirkung des Hodge Operators auf eine beliebige Differentialform $\boldsymbol{\alpha}$ explizit darstellen:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} A_{i_1 \cdots i_p} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{D.10}$$

$$*\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\})+\sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} A_{i_1 \cdots i_p} \, \backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}] \,. \tag{D.11}$$

D.1 Schiefsymmetrische Tensoren beliebiger Stufe

Wir wollen in diesem Abschnitt die Konstruktion einer Differentialform p–ter Stufe (p–Form) aus einem toal antisymmetrischen Tensor demonstrieren. Mit Rücksicht auf den Formencharakter müssen wir diesen Tensor mit kovarianten Expansionskoeffizienten bezüglich einer Basis $\underline{u}^i$ des Dualraums darstellen:

$$\boldsymbol{A} = A_{i_1 \cdots i_p} \, \underline{u}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}^{i_p} \,. \tag{D.12}$$

$\boldsymbol{A}$ ist ein Tensor p–ter Stufe und soll schiefsymmetrisch unter Vertauschung beliebiger Indizes sein

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_p} = -A_{i_2 i_1 \cdots i_p} \,, \tag{D.13}$$

wobei die Indizes i_1 und i_2 willkürlich herausgegriffen wurden. Durch die Schiefsymmetrie (D.13) ergibt sich eine obere Grenze für die Stufe p, welche von der Dimension N der Grundvektorräume abhängt:

$$0 \leq p \leq N \,. \tag{D.14}$$

Für $p > N$ enthalten nämlich alle Koeffizienten $A_{i_1 \cdots i_p}$ mindestens zwei gleiche Indizes und verschwinden. Für $p \leq N$ existieren in der Summe (D.12) Gruppen von Koeffizienten, die entweder gleich sind oder sich nur durch ein Vorzeichen voneinander unterscheiden. Die Zahl n der noch frei wählbaren Koeffizienten entspricht der Zahl von Möglichkeiten, p verschiedene Zahlen aus $1 \cdots N$ herauszugreifen. Damit berechnet sich die Dimension des schiefsymmetrischen Unterraumes zu

$$n = \binom{N}{p} = \frac{N!}{p!(N-p)!} \,. \tag{D.15}$$

Jede der Teilsummen mit bis auf das Vorzeichen gleichen Koeffizienten enthält Terme mit einer festen Auswahl von p Indizes $j_{(1)} \cdots j_{(p)}$ in unterschiedlicher Reihenfolge. Die Koeffizienten $A_{i_1 \cdots i_p}$ durchlaufen somit alle Permutationen dieser Indexwahl und erzeugen $p!$ Summanden mit gleichem Betrag und wechselnden Vorzeichen. So zusammengefaßt lautet $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j_{(1)} < \cdots < j_{(p)}} A_{j_{(1)} \cdots j_{(p)}} \left[\sum_{\substack{i_1 \cdots i_p = \\ \pi(j_{(1)} \cdots j_{(p)})}} \sigma(i_1 \cdots i_p) \; \underline{u}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \underline{u}^{i_p} \right] . \tag{D.16}$$

In Gleichung (D.16) finden sich zwei neue Bezeichnungen, nämlich das Permutationssymbol $\pi(j_{(1)} \cdots j_{(p)})$ unter dem Summenzeichen und die Funktion $\sigma(i_1 \cdots i_p) = \pm 1$, welche den Termen ungerader Permutation von $j_{(1)} \cdots j_{(p)}$ ein Minuszeichen hinzufügt. Der Ausdruck in den eckigen Klammern kann formal als Determinante geschrieben werden:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j_{(1)} < \cdots < j_{(p)}} A_{j_{(1)} \cdots j_{(p)}} \begin{vmatrix} \underline{u}^{j_{(1)}\,(1)} & \ldots & \underline{u}^{j_{(1)}\,(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{u}^{j_{(p)}\,(1)} & \ldots & \underline{u}^{j_{(p)}\,(p)} \end{vmatrix} . \tag{D.17}$$

Die eingeklammerten Spaltennummern geben an, aus welchem Grundvektorraum der Basisvektor $\underline{u}^j$ stammt. Der Tensor $\boldsymbol{A}$ läßt sich als Differentialform interpretieren, wenn die Dualbasis $\underline{u}^j$ als ein System von Erzeugenden für Differentiale aufgefaßt wird. Diese Differentiale existieren entlang der Koordinatenlinien eines Parallelkoordinatensystems, das durch die Basisvektoren $\underline{u}_i$ des Grundvektorraumes festgelegt wird. Unter diesem Aspekt führen wir für die $\underline{u}^j$ eine neue Bezeichnung ein:

$$\underline{u}^j =: dx^j \, . \tag{D.18}$$

Aus Anhang A.2 wissen wir bereits, daß die Elemente der Dualbasis einen Vektor des Grundvektorraumes auf seine kontravarianten Komponenten abbilden, vgl. (A.6). Wenden wir die Basiselemente (D.18) beispielsweise auf den Vektor $\underline{B} = B^i \underline{u}_i$ an, ergibt sich

$$dx^i(\underline{B}) = B^i \, . \tag{D.19}$$

Mit der neuen Schreibweise der Basis und einer Umbenennung der Indizes lautet der Tensor $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i_{(1)} < \cdots < i_{(p)}} A_{i_{(1)} \cdots i_{(p)}} \begin{vmatrix} dx^{i_{(1)}\,(1)} & \ldots & dx^{i_{(1)}\,(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_{(p)}\,(1)} & \ldots & dx^{i_{(p)}\,(p)} \end{vmatrix} . \tag{D.20}$$

In einem letzten Schritt fassen wir die Determinante aus (D.20) als p-faches Schiefprodukt der Basisformen dx^i auf:

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} := \begin{vmatrix} dx^{i_1\,(1)} & \cdots & dx^{i_1\,(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_p\,(1)} & \cdots & dx^{i_p\,(p)} \end{vmatrix} . \tag{D.21}$$

Setzen wir (D.21) in Gleichung (D.20) ein, erhalten wir die gesuchte Darstellung von $\boldsymbol{A}$ als p-Form:

$$\boldsymbol{A} = A_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} . \tag{D.22}$$

Die eingeschränkte Summation über $i_1 < \cdots < i_p$ wird in (D.22) stillschweigend vorausgesetzt und nicht mehr explizit ausgeschrieben. Wir demonstrieren die Funktionsweise dieser Differentialform als multilineare Abbildung, indem wir eine der Basisformen $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ auf die Vektoren $\underline{B}^{(1)} \cdots \underline{B}^{(p)}$ anwenden:

$$\Big[\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \Big] (\underline{B}^{(1)}, \cdots, \underline{B}^{(p)}) = \begin{vmatrix} dx^{i_1}(\underline{B}^{(1)}) & \cdots & dx^{i_1}(\underline{B}^{(p)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_p}(\underline{B}^{(1)}) & \cdots & dx^{i_p}(\underline{B}^{(p)}) \end{vmatrix} . \tag{D.23}$$

Nach Auswertung der Basisabbildungen innerhalb der Determinante wie in (D.19) angegeben, erhalten wir mit

$$\Big[\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \Big] (\underline{B}^{(1)}, \cdots, \underline{B}^{(p)}) = \begin{vmatrix} B^{i_1\,(1)} & \cdots & B^{i_1\,(p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{i_p\,(1)} & \cdots & B^{i_p\,(p)} \end{vmatrix} \tag{D.24}$$

den Volumeninhalt des durch die Vektoren $\underline{B}^{(1)} \cdots \underline{B}^{(p)}$ aufgespannten Parallelepipeds. Handelt es sich bei den Argumenten $\underline{B}^{(1)} \cdots \underline{B}^{(p)}$ um differentielle Tangentialvektoren, produzieren die $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ p–dimensionale differentielle Volumenelemente. Damit ist die p–Form $\boldsymbol{A}$ in Gleichung (D.22) ein geeigneter Integrand für ein p–dimensionales Gebietsintegral.

D.2 Das Quadrat des Hodge Operators

In diesem Anhang untersuchen wir die wiederholte Anwendung des Hodge Operators auf eine p–Form $\boldsymbol{\alpha}$, indem wir dessen Quadrat $**\boldsymbol{\alpha}$ bilden. Mit Hilfe der Definitionsgleichung (4.21.2) analysieren wir diese Operation Schritt für Schritt:

$$\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} \quad = <\boldsymbol{\beta} \cdot *\boldsymbol{\alpha}> \quad \mathbf{vol} \tag{D.25.1}$$

$$\boldsymbol{\beta}' \wedge *\boldsymbol{\alpha} = <\boldsymbol{\beta}' \cdot **\boldsymbol{\alpha}> \mathbf{vol}\ , \tag{D.25.2}$$

das Symbol **vol** dient hierbei als kompakte Bezeichnung für die Volumenform

$$\mathbf{vol} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\ . \tag{D.26}$$

Das in Kapitel 4.3 vorgestellte Verfahren und die am Anfang dieses Anhangs eingeführte Schreibweise versetzen uns in die Lage, den Vorzeichenfaktor im Quadrat des Hodge Operators explizit zu konstruieren. Durch Anwendung des Hodge Operators auf ein Basismonom $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ entsteht beim Umsortieren des Schiefproduktes

$$\backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}] \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{D.27}$$

in die Reihenfolge der Volumenform **vol** das Vorzeichen

$$\sigma_{v(1)} = (-1)^{r(\backslash\{i_1\cdots i_p\}|\{i_1\cdots i_p\})}. \tag{D.28}$$

Zusätzlich sind noch die imaginären Vektoren von $*(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})$ zu berücksichtigen:

$$\sigma_{I(1)} = (-1)^{\sigma(\backslash\{i_1\cdots i_p\})}\ . \tag{D.29}$$

Mit Hilfe dieser Vorzeichenterme läßt sich die duale Form $*\boldsymbol{\alpha}$ gemäß (D.11) explizit darstellen:

$$*\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\{i_1\cdots i_p\}} (-1)^{r(\backslash\{i_1\cdots i_p\}|\{i_1\cdots i_p\})+\sigma(\backslash\{i_1\cdots i_p\})} A_{i_1\cdots i_p} \backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}]\ . \tag{D.30}$$

Bei erneuter Anwendung des Hodgeoperators müssen Terme der Gestalt

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \wedge \backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}] \tag{D.31}$$

in die Volumenform überführt werden, in denen verglichen mit (D.27) die beiden Faktoren ihre Position gewechselt haben. Daher lautet der Vorzeichenfaktor der Vertauschungen diesmal

$$\sigma_{v(2)} = (-1)^{r(\{i_1 \cdots i_p\}|\setminus\{i_1 \cdots i_p\})} \tag{D.32}$$

und derjenige der imaginären Vektoren

$$\sigma_{I(2)} = (-1)^{\sigma(\{i_1 \cdots i_p\})} \,. \tag{D.33}$$

Bei der Bildung des Quadrates des Hodgeoperators müssen alle vier Vorzeichenfaktoren zusammengefaßt werden

$$\begin{aligned} \sigma_{v(1)}\sigma_{v(2)} &= (-1)^{r(\setminus\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + r(\{i_1 \cdots i_p\}|\setminus\{i_1 \cdots i_p\})} = (-1)^{p(n-p)} && \text{(D.34)} \\ \sigma_{I(1)}\sigma_{I(2)} &= (-1)^{\sigma(\setminus\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(\{i_1 \cdots i_p\})} = (-1)^{N_I} \,, && \text{(D.35)} \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung (D.35) direkt aus (D.7) folgt und die Vorzeichen der Vertauschungen (D.34) gemäß (D.5) zu

$$\sigma_{v(1)}\sigma_{v(2)} = (-1)^{p(n-p) + 2\, r(\setminus\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\})} = (-1)^{p(n-p)} \tag{D.36}$$

zusammengefaßt werden konnten. In diesem Schritt ist die Äquivalenz der beiden Zählfunktionen

$$p(n-p) \,+\, 2\, r(\setminus\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) \;\Leftrightarrow\; p(n-p) \tag{D.37}$$

leicht nachzuvollziehen, vgl. unsere Bemerkungen zu Beginn dieses Anhangs. Das Quadrat des Hodge Operators angewandt auf die Form $\boldsymbol{\alpha}$ lautet somit

$$\begin{aligned} **\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_{v(1)}\sigma_{v(2)}\sigma_{I(1)}\sigma_{I(2)}\, A_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= (-1)^{p(n-p)+N_I} \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} A_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, && \text{(D.38)} \end{aligned}$$

denn das Produkt aller Vorzeichenfaktoren ist von den Summationsindizes unabhängig und kann vor die Summe gezogen werden. Die unter der Summe verbliebenen Terme ergeben wieder die urspüngliche Differentialform $\boldsymbol{\alpha}$, und wir erhalten schließlich mit

$$**\boldsymbol{\alpha} = (-1)^{p(n-p)+N_I} \boldsymbol{\alpha} \tag{D.39}$$

das gewünschte Resultat.

D.3 Die zweifache äußere Ableitung

Wir betrachten die zweifache äußere Ableitung einer Differentialform $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathsf{dd}\boldsymbol{\omega} = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \omega_{k_1 \cdots k_p} \, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \, . \tag{D.40}$$

Die Summe über i und j in (D.40) kann in die beiden Anteile mit $i < j$ und $i > j$ zerlegt werden, da die Terme mit $i = j$ verschwinden. Diese Teilsummen können wir unter Beachtung von $dx^j \wedge dx^i = - dx^i \wedge dx^j$ folgendermaßen zusammenfassen:

$$\mathsf{dd}\boldsymbol{\omega} = \sum_{i<j} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \right] \omega_{k_1 \cdots k_p} \, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{k_1} \wedge \cdots \wedge dx^{k_p} \, . \tag{D.41}$$

Wenn die Funktionen $\omega_{k_1 \cdots k_p}$ zweifach stetig differenzierbar sind, darf die Reihenfolge der zweifachen partiellen Ableitung vertauscht werden, und der obenstehende Audruck verschwindet:

$$\mathsf{dd}\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{D.42}$$

Das Lemma von Poincaré gilt also, wenn die zweifachen partiellen Ableitungen der Koeffizientenfunktionen von $\boldsymbol{\omega}$ vertauschbar sind.

D.4 Die Stammfunktion einer Differentialform

Die Aufgabe, zu einer Differentialform $\boldsymbol{\omega}$ mit verschwindender äußerer Ableitung eine Stammfunktion zu finden, hatten wir in Abschnitt 4.6 durch die Einführung eines speziellen Integrationsprozesses gelöst

$$\boldsymbol{\alpha}(\underline{x}) = \mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] \; , \tag{D.43}$$

siehe 4.51 und 4.52. Hierbei diente der Integrationsoperator I[ ] als abkürzende Schreibweise für

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] &= \int_0^1 \boldsymbol{\omega}(t\,\underline{x}) = \int_0^1 t^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx^1\cdots tx^n)\,dt\;\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p} && \text{(D.44.1)}\\
\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p} &= -\sum_{k=1}^{p}(-1)^k x^{i_k}(\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^{i_k}\,, && \text{(D.44.2)}
\end{aligned}
$$

wobei wir diesmal die Summe über die modifizierten Basisformen aus (4.51) im Symbol $\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p}$ zusammengefaßt haben. Zu beweisen bleibt noch der Zusammenhang zwischen I[ ] und der äußeren Ableitung d, den wir in 4.53 folgendermaßen angegeben hatten:

$$
\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] + \mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \boldsymbol{\omega}(\underline{x})\,. \tag{D.45}
$$

Zunächst bilden wir den Term $\mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})]$ aus Gleichung (D.44.1):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] &= \left[\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 t^{p-1}\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx^1\cdots tx^n)\,dt\;dx^j\right]\wedge\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p}\\
&\quad + \int_0^1 t^{p-1}\omega_{i_1\cdots i_p}(tx^1\cdots tx^n)\,dt\;\mathsf{d}\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p}\,, && \text{(D.46)}
\end{aligned}
$$

da wir gemäß der in Abschnitt 4.6 gemachten Voraussetzungen an den Integranden $\omega_{i_1\cdots i_p}(\underline{x})$ und an das Integratonsgebiet die partielle Ableitung mit dem Integral vertauschen dürfen. Die Berechnung der äußeren Ableitung $\mathsf{d}\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p}$ ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}\boldsymbol{\vartheta}^{i_1\cdots i_p} &= -\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\,dx^{i_k}\wedge(\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^{i_k}\\
&= \sum_{k=1}^{p}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\\
&= p\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\,. && \text{(D.47)}
\end{aligned}
$$

Zur Ermittlung des Terms $\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})]$ schreiben wir

$$
\mathsf{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}\omega_{i_1\cdots i_p}(x^1\cdots x^n)\;dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \tag{D.48}
$$

explizit aus und wenden nun den Integrationsoperator I[ ] auf das Ergebnis an:

$$\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^p \frac{\partial}{\partial t x^j} \omega_{i_1 \cdots i_p}(tx^1 \cdots tx^n)\, dt\, \boldsymbol{\vartheta}^{j,i_1 \cdots i_p} \,. \tag{D.49}$$

Den so entstandenen Ausdruck $\boldsymbol{\vartheta}^{j,i_1 \cdots i_p}$ untersuchen wir genauer:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}^{j,i_1 \cdots i_p} &= x^j\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + \sum_{k=1}^{p} x^{i_k}\, dx^j \wedge (\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \backslash dx^{i_k} \\ &= x^j\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} - dx^j \wedge \vartheta^{i_1 \cdots i_p} \,. \end{aligned} \tag{D.50}$$

Setzen wir dieses Resultat in (D.49) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^p x^j \frac{\partial}{\partial t x^j} \omega_{i_1 \cdots i_p}(tx^1 \cdots tx^n)\, dt \;\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &- \left[\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^{p-1} \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \cdots i_p}(tx^1 \cdots tx^n)\, dt\; dx^j \right] \wedge \vartheta^{i_1 \cdots i_p} \,. \end{aligned} \tag{D.51}$$

Die in der zu beweisenden Beziehung (D.45) angegebene linke Seite läßt sich jetzt aus den Ergebnissen (D.46), (D.47) und (D.51) zusammensetzen. Der erste Term aus (D.46) und der zweite Term aus (D.51) heben sich weg, und es bleibt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] + \mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \cdots \\ &\cdots = \int_0^1 t^p \sum_{j=1}^{n} x^j \frac{\partial}{\partial t x^j} \omega_{i_1 \cdots i_p}(tx^1 \cdots tx^n)\, dt \;\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &\quad + \int_0^1 p\, t^{p-1} \omega_{i_1 \cdots i_p}(tx^1 \cdots tx^n)\, dt \;\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \,. \end{aligned} \tag{D.52}$$

Die beiden Integranden enthalten jeweils Teile der totalen Ableitung des Ausdrucks $t^p \omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x})$ nach dem Parameter t und können somit zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}[\mathsf{d}\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] + \mathsf{d}\mathrm{I}[\boldsymbol{\omega}(\underline{x})] = \cdots \\
\cdots &= \int_0^1 \left[t^p \frac{d}{dt} \omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x}) + \omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x}) \frac{d}{dt} t^p \right] dt \;\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[t^p \omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x}) \right] dt \;\; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= t^p \omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x}) \Big|_0^1 \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \; = \; \boldsymbol{\omega}(\underline{x}) \, .
\end{aligned} \tag{D.53}$$

Dieses Resultat gilt unter der Voraussetzung, daß $\omega_{i_1 \cdots i_p}(t\underline{x})$ beim Zusammenziehen des Definitionsgebietes auf $t = 0$ nicht wie $\sim t^p$ oder stärker divergiert, was allerdings durch die in Abschnitt 4.6 festgelegten Voraussetzungen unterbunden wird. Die Beziehung (D.53) ist die Grundlage für die Umkehrung des Lemmas von Poincaré.

D.5 Der Laplace– Beltramioperator

Wir suchen einen Operator, der auf alle Differentialformen ungeachtet ihrer Stufe und der Dimension des Grundvektorraumes wie der D'Alembertoperator wirkt. Die im Folgenden beschriebenen Spezialfälle dienen uns als Richtlinie für die kommenden Rechnungen und legen darüberhinaus nahe, daß ein solcher Operator tatsächlich existiert:

– Im dreidimensionalen euklidischen Raum ist dieser Operator der Laplaceoperator Δ, dessen Anwendung auf Skalare (0-Formen) und Vektoren (1-Formen) wir im Rahmen der elementaren Elektrodynamik bereits kennengelernt haben. Die Diffusionsgleichung ist ein weiteres Beispiel für die Verwendung dieses Operatos in der Physik.

– Im vierdimensionalen pseudoeuklidischen Minkowskiraum wird der gesuchte Operator zum D'Alembertoperator $\Box$ der Wellengleichung. Der Operand ist in diesem Fall ein Vierervektor (eine 1-Form).

Es wird sich zeigen, daß der Laplace– Beltramioperator $\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}}$ alle gewünschten Eigenschaften besitzt. Er ist folgendermaßen definiert:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}} = \mathsf{d}\delta + \delta\mathsf{d} \, . \tag{D.54}$$

In diesem Ausdruck ist d die äußere Ableitung und δ die Koableitung, welche gemäß (4.67.2) aus der äußeren Ableitung mit Hilfe des Hodge Operators gebildet wird:

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1+N_I} *\mathsf{d}* . \tag{D.55}$$

Zunächst setzen wir diese Definition für δ in (D.54) ein, wobei zu beachten ist, daß im zweiten Term die Koableitung δ auf eine $(p+1)$-Form wirkt. Das in diesem Fall resultierende Vorzeichen schreiben wir wie folgt um:

$$(-1)^{n(p+2)+1+N_I} = (-1)^n \cdot (-1)^{n(p+1)+1+N_I} . \tag{D.56}$$

Der zweite Vorzeichenfaktor aus (D.56) ist beiden Termen des Laplace– Beltramioperators gemeinsam und kann auskgelammert werden:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}} = (-1)^{n(p+1)+1+N_I} \Big[\mathsf{d}*\mathsf{d}* + (-1)^n *\mathsf{d}*\mathsf{d} \Big] . \tag{D.57}$$

Da dieser Operator linear ist, genügt es, seine Wirkung auf ein Monom zu studieren:

$$\boldsymbol{\alpha} = a\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{D.58}$$

Sowohl in diesem Monom als auch in allen folgenden Termen gehen wir davon aus, daß die Indizes angeordnet sind:

$$i_1 < \cdots < i_p . \tag{D.59}$$

Die Strategie der kommenden Rechenschritte wird sein, diese Anordnung aufrechtzuerhalten, zusätzliche Terme dx^k einzusortieren und die so entstehenden Vorzeichen nachzuvollziehen. Als nächstes analysieren wir die Wirkung der äußeren Ableitung und der Koableitung auf die ausgewählte Form $\boldsymbol{\alpha}$.

– *Die äußere Ableitung* d*:*
  Der Index der nichtverschwindenden Beiträge von $\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}$ durchläuft die zu $\{i_1 \cdots i_p\}$ komplementäre Indexgruppe $\backslash\{i_1 \cdots i_p\}$. Das Einsortieren des durch die äußere Ableitung entstehenden Basiselementes dx^k erfordert jeweils $r(k|\{i_1 \cdots i_p\})$ Vertauschungen, denn dx^k steht auf der linken Seite. Wir schreiben den Zustand nach dem Einsortieren folgendermaßen:

$$dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} = (-1)^{r(k|\{i_1\cdots i_p\})} \, (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \cup dx^k . \tag{D.60}$$

Das Ergebnis der äußeren Ableitung lautet somit

$$\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k \in \backslash\{i_1 \cdots i_p\}} (-1)^{r(k|\{i_1 \cdots i_p\})} \frac{\partial}{\partial x^k} a \, (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \cup dx^k \, . \tag{D.61}$$

In jedem Summand von (D.61) wird durch die äußere Ableitung d ein zusätzlicher Basisvektor dx^k erzeugt.

– *Der Operator* $*\mathsf{d}*$*:*
Da wir die explizite Darstellung des Hodge Operators aus (D.11) bereits kennen, können wir $*\boldsymbol{\alpha}$ direkt angeben:

$$*\boldsymbol{\alpha} = (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} \, a \, \backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}] \, . \tag{D.62}$$

Ebenso können wir den Ausdruck $\mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha}$ explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{k \in \{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_v \sigma_I \frac{\partial}{dx^k} a \, (\backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}]) \cup dx^k \\ \sigma_v &= (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + r(k|\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} \\ \sigma_I &= (-1)^{\sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} \end{aligned} \tag{D.63}$$

Der Index von k durchläuft hier im Vergleich zu $\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha}$ die komplementäre Menge $\{i_1 \cdots i_p\}$. Anschließend wenden wir auf (D.63) noch einmal den Hodge Operator an:

$$\begin{aligned} *\mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha} &= \sum_{k \in \{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_v \sigma_I \frac{\partial}{dx^k} a \, (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \backslash dx^k \\ \sigma_v &= (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + r(k|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}) + r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}, k)} \\ \sigma_I &= (-1)^{\sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k})} \end{aligned} \tag{D.64}$$

Das Vorzeichen σ_v der Vertauschungen läßt sich durch eine gezielte Suche nach äquivalenten Versionen der verwendeten Zählfunktionen vereinfachen. Wir ersetzen zunächst $r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k} \,|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}, k)$ durch $r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\})$ inklusive der zugehörigen Korrekturen:

$$\begin{aligned} r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k} \,|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}, k) \;\Leftrightarrow\; & r(\{i_1 \cdots i_p\}|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}) \,+\, \cdots \\ & \cdots + r(k|\backslash\{i_1 \cdots i_p\}) + r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}|k) \end{aligned} \tag{D.65}$$

Anschaulich wird erst das zusätzliche dx^k aus der komplementären Indexgruppe nach links herausgezogen und anschließend von rechts in die vorhandene Lücke in $(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^k$ einsortiert. Nach Einsetzen in σ_v fällt der gerade Term $2\,r(k|\backslash\{i_1\cdots i_p\})$ aus der Vorzeichenzählung heraus und die folgenden beiden Terme lassen sich nach (D.5) zusammenfassen:

$$r(\backslash\{i_1\cdots i_p\}|\{i_1\cdots i_p\}) + r(\{i_1\cdots i_p\}|\backslash\{i_1\cdots i_p\}) \;\Leftrightarrow\; p(n-p)\,. \tag{D.66}$$

Der so vereinfachte Vorzeichenterm σ_v lautet also

$$\sigma_v = (-1)^{p(n-p)\,+\,r(\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k}|k)}\,. \tag{D.67}$$

Auch das Vorzeichen σ_I der imaginären Basisvektoren läßt sich mit Hilfe äquivalenter Zählfunktionen umschreiben:

$$\sigma(\backslash\{i_1\cdots i_p\}) + \sigma(\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k}) \;\Leftrightarrow\; N_I - \sigma(k) \;\Leftrightarrow\; N_I + \sigma(k)\,. \tag{D.68}$$

Damit lautet das Resultat des Operators $*\mathsf{d}*$ in vereinfachter Form:

$$*\mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha} \;=\; \sum_{k\,\in\,\{i_1\cdots i_p\}} \sigma\,\frac{\partial}{dx^k} a\,(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^k \tag{D.69}$$

$$\sigma \;=\; (-1)^{p(n-p)+N_I\,+\,r(\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k}|k)\,+\,\sigma(k)}\,. \tag{D.70}$$

Im Gegensatz zur äußeren Ableitung d wird beim Operator $*\mathsf{d}*$ bzw. δ in jedem Summand von $\boldsymbol{\alpha}$ jeweils ein Basiselement dx^k vernichtet.

Im Laplace– Beltramioperator sind die äußere Ableitung und die Koableitung in unterschiedlicher Reihenfolge hintereinandergeschaltet. Wir betrachten zunächst den Term $\mathsf{d}*\mathsf{d}*$, für den wir die äußere Ableitung (D.61) der $p-1$–Form (D.69) berechnen:

$$\mathsf{d}*\mathsf{d}*\boldsymbol{\alpha} \;=\; \sum_{k\,\in\,\{i_1\cdots i_p\}}\;\sum_{l\,\in\,\backslash\{i_1\cdots i_p\},k} \sigma_v\sigma_I\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^l\partial x^k}\,(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^k\cup dx^l \tag{D.71}$$

$$\sigma_v \;=\; (-1)^{p(n-p)\,+\,r(\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k}|k)\,+\,r(l|\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k})}$$

$$\sigma_I \;=\; (-1)^{N_I\,+\,\sigma(k)}\,.$$

In den Basisformen fehlt jeweils das Basiselement dx^k und stattdessen ist das Element dx^l zusätzlich vorhanden. Beim Term $*\mathsf{d}*\mathsf{d}$ wenden wir (D.69) auf die $p+1$–Form (D.61) an:

$$*\mathsf{d}*\mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \;=\; \sum_{k\,\in\,\backslash\{i_1\cdots i_p\}}\;\sum_{l\,\in\,\{i_1\cdots i_p\},k} \sigma_v\sigma_I\,\frac{\partial^2 a}{\partial x^l\partial x^k}\,(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\cup dx^k\backslash dx^l \tag{D.72}$$

$$\sigma_v \;=\; (-1)^{(p+1)(n-p-1)\,+\,r(\{i_1\cdots i_p\},k,\cancel{l}|l)\,+\,r(k|\{i_1\cdots i_p\})}$$

$$\sigma_v \;=\; (-1)^{N_I\,+\,\sigma(l)}\,.$$

Hier fehlt in den Basisformen jeweils das Element dx^l und stattdessen ist dx^k zusätzlich vorhanden. Formal erhält man dieses Resultat aus dem Ausdruck (D.71) für $\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*}$, indem man folgende Ersetzungen vornimmt:

$$k \;\Leftrightarrow\; l \tag{D.73}$$

$$p \;\Rightarrow\; p+1 \tag{D.74}$$

$$\{i_1 \cdots i_p\} \;\Rightarrow\; \{i_1 \cdots i_p\}, k \tag{D.75}$$

$$\backslash\{i_1 \cdots i_p\} \;\Rightarrow\; \backslash\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}\,. \tag{D.76}$$

Im Laplace– Beltramioperator $\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}}$ werden die Beiträge $\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*}$ und ${*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}$ zum Ausdruck $\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} + (-1)^n{*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}$ zusammengefaßt. Nach dem Herausziehen des gemeinsamen Vorzeichenfaktors

$$\sigma_c = (-1)^{p(n-p)+N_I} \tag{D.77}$$

bekommen beide Terme eine etwas einfachere Gestalt. Zunächst bereiten wir den Vorzeichenterm in ${*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}$ für das Abspalten von σ_c vor:

$$(-1)^{(p+1)(n-p-1)} \;=\; (-1)^{p(n-p)-2p+n-1} \;=\; (-1)^{p(n-p)+n+1}\,. \tag{D.78}$$

Jetzt lassen sich die beiden Anteile (D.71) und (D.72) folgendermaßen addieren:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} \;+\; (-1)^n\,{*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d} \;= \\
&\sigma_c \left[\sum_{k\in\{i_1\cdots i_p\}} \; \sum_{l\in\backslash\{i_1\cdots i_p\},k} \sigma_{(1)}(k,l)\, \frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k}\, (dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\backslash dx^k \cup dx^l \;-\cdots \right. \\
&\left. \cdots - \sum_{k\in\backslash\{i_1\cdots i_p\}} \; \sum_{l\in\{i_1\cdots i_p\},k} \sigma_{(2)}(k,l)\, \frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k}\, (dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p})\cup dx^k\backslash dx^l \right] \\
&\sigma_{(1)}(k,l) \;=\; (-1)^{r(\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k}|k)\,+\,r(l|\{i_1\cdots i_p\},\cancel{k})\,+\,\sigma(k)} \\
&\sigma_{(2)}(k,l) \;=\; (-1)^{r(\{i_1\cdots i_p\},k,\cancel{l}|l)\,+\,r(k|\{i_1\cdots i_p\})\,+\,\sigma(l)}
\end{aligned} \tag{D.79}$$

Offenbar macht es Sinn, die Diagonalterme $k=l$ getrennt vom Rest zu betrachten. Die Nichtdiagonalterme $k\neq l$ lassen sich jeweils paarweise zusammenfassen, indem der k,l–Beitrag des ersten Termes mit den l,k– Beitrag des zweiten Termes kombiniert wird.

Beide Terme enthalten nämlich das gleiche Basismonom:

$$
\begin{aligned}
\Big[\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} \,+\, (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}\Big]_{k,l} \;&=\; \cdots \\
\cdots \;=\; \sigma_c\Big(\sigma_{(1)}(k,l) - \sigma_{(2)}(l,k)\Big)\, &\frac{\partial^2 a}{\partial x^l \partial x^k}\,(\,dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \backslash dx^k \cup dx^l
\end{aligned}
\tag{D.80}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(1)}(k,l) \;&=\; (-1)^{r(\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}|k) \,+\, r(l|\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}) \,+\, \sigma(k)} \\
\sigma_{(2)}(l,k) \;&=\; (-1)^{r(\{i_k \cdots i_p\},l,\cancel{k}\,|k) \,+\, r(l|\{i_1 \cdots i_p\}) \,+\, \sigma(k)}\,.
\end{aligned}
$$

Wir unterscheiden nun die beiden Fälle

– *Fall $k > l$:*
Da in den Vorzeichentermen $\sigma_{(1)}(k,l)$ und $\sigma_{(2)}(l,k)$ durchweg l links und k rechts steht, werden k und l bei den in (D.80) angegebenen Sortieraktionen niemals miteinander vertauscht, und es gilt:

$$
r(\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}|k) \;=\; r(\{i_k \cdots i_p\},l,\cancel{k}\,|k) \tag{D.81}
$$

$$
r(l|\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}) \;=\; r(l|\{i_1 \cdots i_p\})\,. \tag{D.82}
$$

Damit sind die beiden Vorzeichenfaktoren gleich

$$
\sigma_{(1)}(k,l) \,=\, \sigma_{(2)}(l,k) \tag{D.83}
$$

und der Term $[\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} \,+\, (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}]_{k,l}$ verschwindet.

– *Fall $k < l$:*
Weil in den Vorzeichentermen weiterhin k links und l rechts steht, werden diesmal k und l durch die Sortierungen in (D.80) vertauscht:

$$
r(\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}|k) \;=\; r(\{i_k \cdots i_p\},l,\cancel{k}\,|k) - 1 \tag{D.84}
$$

$$
r(l|\{i_1 \cdots i_p\},\cancel{k}) \;=\; r(l|\{i_1 \cdots i_p\}) - 1 \tag{D.85}
$$

Die Summe der linken Seiten (Term $\sigma_{(1)}(k,l)$) ist jedoch als Zählfunktion zur Summe der rechten Seiten (Term $\sigma_{(2)}(l,k)$) äquivalent, da beide Summen sich nur durch den geraden Term -2 unterscheiden. Somit verschwinden wegen

$$
\sigma_{(1)}(k,l) \,=\, \sigma_{(2)}(l,k) \tag{D.86}
$$

die Terme $[\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} \,+\, (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d}]_{k,l}$ auch in diesem Fall.

Im Laplace– Beltramioperator (D.79) leisten also nur die Diagonalterme $k = l$ einen Beitrag, während die Nichtdiagonalterme $k \neq l$ sich vollständig wegheben. Deshalb bleibt von der Doppelsumme in (D.80) nur die einfache Summe über alle n Basisvektoren übrig, die allerdings in zwei Beiträge über die komplementären Indexgruppen $\{i_1 \cdots i_p\}$ und $\backslash\{i_1 \cdots i_p\}$ aufgeteilt ist:

$$\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} + (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d} = \tag{D.87}$$

$$\sigma_c \left[\sum_{k \in \{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_{(1)}(k,k) \frac{\partial^2 a}{\partial (x^k)^2} - \sum_{k \in \backslash\{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_{(2)}(k,k) \frac{\partial^2 a}{\partial (x^k)^2} \right] dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$\sigma_{(1)}(k,k) = (-1)^{r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}|k) + r(k|\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}) + \sigma(k)}$$

$$\sigma_{(2)}(k,k) = (-1)^{r(\{i_1 \cdots i_p\}|k) + r(k|\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(k)}$$

Wieder lassen sich die Vorzeichenterme $\sigma_{(1)}(k,k)$ und $\sigma_{(2)}(k,k)$ mit Hilfe von Äquivalenzumformungen der Zählfunktionen berechnen:

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)}(k,k) \quad &: \quad r(\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}|k) + r(k|\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}) + \sigma(k) \\ &\Leftrightarrow \quad p - 1 + 2\,r(k|\{i_1 \cdots i_p\}, \cancel{k}) + \sigma(k) \\ &\Leftrightarrow \quad p - 1 + \sigma(k) \end{aligned} \tag{D.88}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(2)}(k,k) \quad &: \quad r(\{i_1 \cdots i_p\}|k) + r(k|\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(k) \\ &\Leftrightarrow \quad p + 2\,r(k|\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(k) \\ &\Leftrightarrow \quad p + \sigma(k)\,. \end{aligned} \tag{D.89}$$

Setzt man diese Resultate in (D.87) ein, erhält man unter Verwendung der Definition (D.58) für die untersuchte Form $\boldsymbol{\alpha}$

$$\mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} + (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d} = \tag{D.90}$$

$$\sigma_c\,(-1)^{p-1} \left[\sum_{k \in \{i_1 \cdots i_p\}} (-1)^{\sigma(k)} \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2} - \sum_{k \in \backslash\{i_1 \cdots i_p\}} (-1)^{\sigma(k)} \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2} \right] \boldsymbol{\alpha}$$

$$\sigma_c\,(-1)^{p-1} \sum_k (-1)^{\sigma(k)} \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2}\, \boldsymbol{\alpha}\,.$$

Die in die komplementären Indexgruppen zerfallenen Teilsummen ließen sich nach Einsetzen der Vorzeichenfaktoren (D.88) und (D.89) zusammenfassen. In einem abschließenden Schritt interpretieren wir die Vorzeichen

$$(-1)^{\sigma(k)} =: g^{kk} \tag{D.91}$$

als Komponenten des inversen metrischen Tensors und sind damit in der Lage, den Ausdruck (D.90) als Skalarprodukt zu schreiben:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}{*}\mathsf{d}{*} + (-1)^n {*}\mathsf{d}{*}\mathsf{d} &= \sigma_c\,(-1)^{p-1} \sum_k g^{kk}\,\frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2}\,\boldsymbol{\alpha} \\ &= (-1)^{pn+1+N_I}\,g^{kl}\,\frac{\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^l}\,\boldsymbol{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{D.92}$$

Bei der Zusammenfassung der Vorzeichenfaktoren fällt der Term $p(p-1)$ als gerade Zahl aus der Zählung heraus. Die Definition (D.55) des Laplace– Beltramioperators enthält ein weiteres Vorzeichen, nach dessen Berücksichtigung die endgültige Form von $\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}}$ schließlich

$$\boldsymbol{\Delta}_{\text{LB}}\,\boldsymbol{\alpha} \;=\; \Big[\mathsf{d}\delta + \delta\mathsf{d}\Big]\boldsymbol{\alpha} \;=\; (-1)^n\,g^{kl}\,\frac{\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^l}\,\boldsymbol{\alpha} \tag{D.93}$$

lautet. Die Differentialform $\boldsymbol{\alpha}$ beschränkt sich nicht auf das von uns untersuchte Monom sondern kann beliebig sein. In der obenstehenden Gestalt ist die Verwandschaft zum Laplace– und D'Alembertoperator nicht zu übersehen, denn bei geeigneter Wahl von Dimension und Metrik erhalten wir bis auf den zusätzlichen Vorzeichenterm $(-1)^n$ den

$$\begin{array}{lll} n = 3, & g : (+++) & \text{Laplaceoperator} \\ n = 4, & g : (+---) & \text{Dalembertoperator}\,. \end{array} \tag{D.94}$$

Die obenstehenden Symbole in Klammern sind Darstellungen der Signatur der betreffenden Metrik. Der Laplace– Beltramioperator (D.93) erweitert diese bekannten Spezialfälle auf beliebige Dimensionen, Metriken und Stufen einer Differentialform $\boldsymbol{\alpha}$.

Anhang E: Differentialformen und Tensoren

Gelegentlich ist es notwendig, zwischen Tensoroperationen und dem Differentialformenkalkül zu übersetzten. In unserem Fall macht der Energie- Impulstensor einen Rückgriff auf die Tensorschreibweise unumgänglich, weil er symmetrisch ist und sich somit nicht durch Differentialformen allein ausdrücken läßt. In diesem Anhang stellen wir die für die Umrechnungen notwendigen Schnittstellen zwischen Tensoren und Differentialformen bereit.

E.1 Überschiebung einer p–Form mit einer q–Form

Eine häufig benötigte Tensoroperation ist die Überschiebung zweier total antisymmetrischer Tensoren p–ter Stufe (Tensor $\boldsymbol{A}$) und q–ter Stufe (Tensor $\boldsymbol{B}$) mit $q \leq p$. Wir stellen uns die Frage, wie diese Operation zu modifizieren ist, wenn wir die Tensoren als Differentialformen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ interpretieren. Da diese Untersuchung im Rahmen der Elektrodynamik durchgeführt wird, vermittelt die Minkowskimetrik zwischen Vektorraum und Dualraum und ermöglicht das Heben und Senken von Indizes. Eine Schlüsselrolle spielt hierbei der Ausdruck $*(*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})$, den wir nun mit Hilfe der zu Beginn von Anhang D vorgestellten Indexgruppen und Zählfunktionen im Detail analysieren werden. Zunächst entwickeln wir $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ in einer Basis:

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} A_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \tag{E.1.1}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{\{i_1 \cdots i_q\}} B_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}\,. \tag{E.1.2}$$

Wie bisher beziehen wir uns bei der Anwendung des Hodge Operators auf die Definitionsgleichung (4.21.2) und bauen den gesuchten Ausdruck Schritt für Schritt auf. Aus Anhang D können wir die explizite Darstsllung (D.11) für $*\boldsymbol{\alpha}$ übenehmen:

$$*\boldsymbol{\alpha} \;=\; \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} A_{i_1 \cdots i_p} \,\backslash[dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}]\,. \tag{E.2}$$

Bei der Bildung von $*\boldsymbol{\alpha}$ entstehen Summanden vom Grad $n-p$, welche jeweils die Basisvektoren $dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}$ nicht enthalten. Der Term $r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\})$ beschreibt die Anzahl der Vertauschungen, mit denen sich die Basisvektoren $\{dx^{i_1} \cdots dx^{i_p}\}$ aus der Volumenform auf die rechte Seite separieren lassen. Die Zahl $\sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})$ steht für die Anzahl der imaginären Vektoren in der zu $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ komplementären

Basisform, wobei sich der Begriff „imaginär“ auf die dem Hodge Operator zugrundeliegende Metrik bezieht. Im nächsten Schritt wird das Schiefprodukt von $*\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ gebildet:

$$
\begin{aligned}
*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} &= \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_{v,I}\, A_{i_1 \cdots i_p} B_{i_1 \cdots i_q} (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \backslash dx^{i_{q+1}} \cdots dx^{i_p} \\
\sigma_{v,I} &= (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) + r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_q\}) + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} ,
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

die Vorzeichen der Vertauschungen (v) und der imaginären Basiselemente (I) haben wir in dem Faktor $\sigma_{v,I}$ zusammengefaßt. Durch die Multiplikation mit $\boldsymbol{\beta}$ wird jede komplementäre Basisform der Gleichung (E.2) um jeweils q Basisvektoren ergänzt und zu einer $(n - p + q)$– Form erweitert (für $q = p$ ist es die Volumenform). Die Zählfunktion $r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_q\})$ beschreibt das Einsortieren der $dx^1 \cdots dx^q$ in die komplementären Basismonome, wodurch der Effekt der Vertauschungen des vorherigen Schrittes teilweise (für $q = p$ sogar vollständig) wieder aufgehoben wird. Wir analysieren diesen Vorgang genauer, indem wir im Term $r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\})$ die rechte Indexgruppe $\{i_1 \cdots i_p\}$ in die Teilgruppen $\{i_1 \cdots i_q\}$ und $\{i_{q+1} \cdots i_p\}$ zerlegen:

$$
\begin{aligned}
& r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_p\}) = \cdots \\
& \qquad \cdots = r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_1 \cdots i_q\}) + r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_{q+1} \cdots i_p\}) .
\end{aligned}
\tag{E.4}
$$

Diese Trennung ist erlaubt, da sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite von (E.4) jedes rechtstehende Basiselement nur mit denjenigen linksstehenden Basiselementen vertauscht wird, die einen größeren Index tragen. Der Trennungsprozeß der Indexgruppen $\{i_1 \cdots i_q\}$ und $\{i_{q+1} \cdots i_p\}$ selbst spielt in dieser Bilanz keine Rolle. Er wird jedoch benötigt, um die Indizes $i_1 \cdots i_q$ in den Koeffizienten von $\boldsymbol{\alpha}$ nach links zu verschieben:

$$
A_{i_1 \cdots i_p} = (-1)^{r(\{i_1 \cdots i_q\}|\{i_{q+1} \cdots i_p\})} A_{i_1 \cdots i_q, i_{q+1} \cdots i_p} . \tag{E.5}
$$

Setzen wir (E.4) und (E.5) in (E.3) ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} &= \sum_{\{i_1 \cdots i_p\}} \sigma_{v,I}\, A_{i_1 \cdots i_q, i_{q+1} \cdots i_p} B_{i_1 \cdots i_q} (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \backslash dx^{i_{q+1}} \cdots dx^{i_p} \\
\sigma_{v,I} &= (-1)^{r(\backslash\{i_1 \cdots i_p\}|\{i_{q+1} \cdots i_p\}) + r(\{i_1 \cdots i_q\}|\{i_{q+1} \cdots i_p\} + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} \\
&= (-1)^{r(\backslash\{i_{q+1} \cdots i_p\}|\{i_{q+1} \cdots i_p\}) + \sigma(\backslash\{i_1 \cdots i_p\})} ,
\end{aligned}
\tag{E.6}
$$

denn hier können wir bei den verbliebenen Zählfunktionen in einem zu (E.4) umgekehrten Prozeß die linken Indexgruppen zusammenfassen:

$$r(\backslash\{i_1\cdots i_p\}|\{i_{q+1}\cdots i_p\}) \;+\; r(\{i_1\cdots i_q\}|\{i_{q+1}\cdots i_p\}) \;=\; \cdots \tag{E.7}$$

$$\cdots \;=\; r(\backslash\{i_{q+1}\cdots i_p\}|\{i_{q+1}\cdots i_p\})\,. \tag{E.8}$$

Die abschließende Anwendung des Hodge Operators ergibt

$$\begin{aligned} *(*\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{\{i_1\cdots i_p\}} \sigma_v\sigma_I\, A_{i_1\cdots i_q,i_{q+1}\cdots i_p} B_{i_1\cdots i_q}\, dx^{i_{q+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \qquad \text{(E.9)}\\ \sigma_v &= (-1)^{r(\backslash\{i_{q+1}\cdots i_p\}|\{i_{q+1}\cdots i_p\})+r(\{i_{q+1}\cdots i_p\}|\backslash\{i_{q+1}\cdots i_p\})}\\ \sigma_I &= (-1)^{\sigma(\backslash\{i_1\cdots i_p\})+\sigma(\{i_{q+1}\cdots i_p\})}\,. \end{aligned}$$

Das Resultat ist eine $(p-q)$– Form, deren Basismonome $dx^{q+1}\wedge\cdots\wedge dx^p$ bei der Bildung des Hodge Operators von links in die Volumenform einsortiert werden müssen. Sämtliche Vertauschungsvorzeichen können gemäß (D.5) zu

$$\begin{aligned} &r(\backslash\{i_{q+1}\cdots i_p\}|\{i_{q+1}\cdots i_p\}) + r(\{i_{q+1}\cdots i_p\}|\backslash\{i_{q+1}\cdots i_p\}) \;\Leftrightarrow\; \cdots \qquad \text{(E.10)}\\ &\quad\cdots \;\Leftrightarrow\; (p-q)(n-p+q) \end{aligned}$$

zusammengefaßt werden. Darüberhinaus lassen sich gemäß (D.7) die Vorzeichen aus den Skalarprodukten der imaginären Basivektoren in $\{dx^{q+1}\cdots dx^p\}$ mit den Beiträgen der imaginären Baisvektoren aus Schritt (E.2) verbinden:

$$\sigma(\backslash\{i_1\cdots i_p\}) + \sigma(\{i_{q+1}\cdots i_p\}) \;\Leftrightarrow\; N_I + \sigma(i_1\cdots i_q)\,. \tag{E.11}$$

Nach dieser Umformung der beiden Vorzeichenfaktoren σ_v und σ_I ergibt sich als Resultat

$$*(*\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}) = \sigma_c \sum_{\{i_1\cdots i_p\}} (-1)^{\sigma(\{i_1\cdots i_q\})} A_{i_1\cdots i_q,i_{q+1}\cdots i_p} B_{i_1\cdots i_q}\, dx^{i_{q+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} \tag{E.12}$$

$$\sigma_c = (-1)^{(p-q)(n-p+q)+N_I}\,. \tag{E.13}$$

Diese Gleichung modifizieren wir noch folgendermaßen: Der eigentliche Ursprung des Vorzeichenterms $(-1)^{\sigma(i_1\cdots i_q)}$ liegt in den Komponenten g^{ii} des implizit im Hodge Operator verwendeten metrischen Tensors, mit dessen Hilfe

$$(-1)^{\sigma(i_1\cdots i_q)} = g^{i_1 i_1}\cdots g^{i_q i_q} \tag{E.14}$$

geschrieben werden kann. Die eingeschränkte Summe über die $i_1 < \cdots < i_q$ läßt sich expandieren, denn die durch die Vertauschungen der Indizes hervorgerufenen Vorzeichenwechsel geschehen in $A_{i_1 \cdots i_q,\, i_{q+1} \cdots i_p}$ und $B_{i_1 \cdots i_q}$ gleichzeitig und heben sich somit auf. Die nun mehrfache Zählung der Summanden muß durch den kombinatorischen Faktor $1/q!$ kompensiert werden. Mit diesen Änderungen lautet Gleichung (E.9):

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) &= \sigma_c \sum_{i_{q+1} < \cdots < i_p} \frac{1}{q!} \sum_{i_1 \cdots i_q = 1}^{n} g^{i_1 i_1} \cdots g^{i_q i_q} \cdots \\
&\qquad \cdots A_{i_1 \cdots i_q,\, i_{q+1} \cdots i_p} B_{i_1 \cdots i_q}\, dx^{i_{q+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\
&= \sigma_c \sum_{i_{q+1} < \cdots < i_p} \frac{1}{q!} A_{i_1 \cdots i_q,\, i_{q+1} \cdots i_p} B^{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_{q+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \qquad \text{(E.15)} \\
\sigma_c &= (-1)^{(p-q)(n-p+q)+N_I}\,,
\end{aligned}$$

denn für die expandierten Summen $i_1 \cdots i_q$ gilt die Einsteinsche Summationskonvention. Die Koeffizienten dieser Differentialform enthalten die Komponenten der überschobenen Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, und somit ist es uns gelungen, diese Überschiebung als Operation der korrespondierenden Differentialformen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ auszudrücken.

Zum Test und um die im Text benötigten Anwendungsfälle abzudecken betrachten wir nun einige spezielle Beispiele zur Überschiebungsformel (E.15):

- *$\boldsymbol{\beta}$ ist eine Nullform ($q=0$):*
  Die Form $\boldsymbol{\beta}$ wird hierbei auf einen einfachen Vorfaktor reduziert, weswegen wir uns auf $\boldsymbol{\beta} = 1$ beschränken können:

  $$\begin{aligned}
  (\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) &= **\boldsymbol{\alpha} \\
  &= (-1)^{p(n-p)+N_I} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} A_{i_1 \cdots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \qquad \text{(E.16)} \\
  &= (-1)^{p(n-p)+N_I} \boldsymbol{\alpha}\,.
  \end{aligned}$$

  Dieses Resultat stimmt mit dem Ausdruck (D.39) für das Quadrat des Hodge Operators überein.

– *Vollständige Überschiebung ($q{=}p$):*
Das Resultat ist in diesem Fall eine Nullform und die Summation erstreckt sich über alle p Indizes:

$$*(*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \;=\; (-1)^{N_I} \frac{1}{p!} A_{i_1 \cdots i_p} B^{i_1 \cdots i_p} \,. \tag{E.17}$$

Dieser Ausdruck ist nicht so allgemein wie er auf den ersten Blick erscheinen mag, denn er gilt natürlich nur für total antisymmetrische Tensoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, für die äquivalente Differentialformen $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ existieren.

– *Matrix– Vektor– Multiplikation ($p = 2$, $q = 1$):*
Auch dieser wichtige Spezialfall einer Überschiebung wird durch den Ausdruck (E.15) abgedeckt:

$$*(*\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) \;=\; (-1)^{n-1+N_I} A_{i_1 i_2}\, B^{i_1}\, dx^{i_2} \,. \tag{E.18}$$

Diese Beziehung gilt ebenfalls nur für schiefsymmetrische Matrizen mit der Eigenschaft $A_{i_1 i_2} = -A_{i_2 i_1}$.

E.2 Die Divergenz einer 1-Form

In Bilanzgleichungen wie der Kontinuitätsgleichung (3.7) wird die räumliche Umverteilung von Größen mit Hilfe der Divergenz ihrer Stromdichte beschrieben. Die elementare Vektoranalysis behandelt die Divergenz als formales Skalarprodukt eines Vektorfeldes mit dem Gradienten. Andererseits haben wir bereits festgestellt, daß auch die äußere Ableitung den Charakter einer Divergenz annehmen kann, wenn sie wie in Gleichung (5.3) auf eine $n{-}1$–Form wirkt. In diesem Abschnitt wollen wir den Übergang von der Vektorschreibweise der Divergenz zur äußeren Ableitung einer Differentialform nachvollziehen, wofür wir als Ausgangspunkt eine 1-Form $\boldsymbol{\alpha}$ mit der Basisdarstellung

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_i A_i\, dx^i \tag{E.19}$$

wählen. Durch Anwendung des Hodge Operators entsteht die $n{-}1$–Form

$$*\boldsymbol{\alpha} = \sum_i (-1)^{r(\setminus\{i\}|\{i\})+\sigma(\setminus\{i\})}\, A_i \setminus[dx^i] \,, \tag{E.20}$$

worin wir wie in Anhang D mit $r(\setminus\{i\}|\{i\})$ die Zahl der Vertauschungen bezeichnen, mit denen das Basiselement dx^i nach rechts aus der Volumenform gezogen wird. Ebenso wurde die Zahl $\sigma(\backslash\{i\})$ der imaginären Basiselemente in den dualen Basisformen analog zu Anhang D und zum vorherigen Abschnitt eingeführt. Die anschließende Bildung der äußeren Ableitung d vervollständigt jeden Summand in (E.20) zur Volumenform $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \mathbf{vol}$:

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} \;=\; \Big[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{r(\{i\}|\backslash\{i\}) + r(\backslash\{i\}|\{i\}) + \sigma(\backslash\{i\})} \frac{\partial}{\partial x^i} A_i\Big]\, \mathbf{vol}\ . \tag{E.21}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (D.5) und (D.7) lassen sich die Zählfunktionen r und σ vereinfachen:

$$n-1 \;=\; r(\{i\}|\backslash\{i\}) \,+\, r(\backslash\{i\}|\{i\}) \tag{E.22}$$

$$N_I \;=\; \sigma(\backslash\{i\}) \,+\, \sigma(\{i\})\,. \tag{E.23}$$

Die Gesamtzahl der Vertauschungen in (E.21) ist also für alle Terme gleich, weswegen das Vorzeichen vor die Summe gezogen werden kann:

$$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} \;=\; (-1)^{n-1+N_I}\Big[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(\{i\})} \frac{\partial}{\partial x^i} A_i\Big]\, \mathbf{vol}\ . \tag{E.24}$$

Die erneute Anwendung des Hodge Operators betrifft die Volumenform **vol**, bei der weder Vertauschungen noch imaginäre Vektoren zu berücksichtigen sind. Das Ergebnis ist wie die Divergenz der elementaren Vektoranalysis ein Skalar:

$${*}\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} \;=\; (-1)^{n-1+N_I}\Big[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)} \frac{\partial}{\partial x^i} A_i\Big]\,. \tag{E.25}$$

Den innerhalb der Summe verbliebenen Term $(-1)^{\sigma(i)}$ interpretieren wir als Koeffizienten g^{ii} des metrischen Tensors und verwenden ihn zum Hochziehen des Index von A_i, womit der Ausdruck (E.25) wie die Divergenz der Vektoranalysis die Form eines Skalarproduktes erhält:

$${*}\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} \;=\; (-1)^{n-1+N_I}\Big[\sum_{i=1}^{n} g^{ii} \frac{\partial}{\partial x^i} A_i\Big] \;=\; (-1)^{n-1+N_I}\, g^{ij}\, \frac{\partial}{\partial x^i} A_j\,. \tag{E.26}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß die Minkowskimetrik Diagonalgestalt besitzt. Dieser Ausdruck verknüpft die elementare Divergenz mit der äußeren Ableitung und dem Hodge Operator bzw. gemäß (4.67) mit der Koableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} A^i \;=\; (-1)^{n-1+N_I}\, {*}\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} \;=\; (-1)^n\, \delta\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{E.27}$$

Formeltabelle

	Elementar	Vierertensoren	Differentialformen
Stromdichte	ρ, $\underline{j}$	$j^\mu = (c\rho, j^1, j^2, j^3)^T$	$\boldsymbol{\iota} = c\rho\ dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^1\ dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - j^2\ dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - j^3\ dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2$
Ladungs-erhaltung	$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\underline{j} = 0$	$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, j^\mu = 0$	$\mathsf{d}\boldsymbol{\iota} = 0$
Potentiale	Φ, $\underline{A}$	$A^\mu = (\Phi, A^1, A^2, A^3)^T$	$\boldsymbol{\alpha} = \Phi\, dx^0 - A^1\, dx^1 - A^2\, dx^2 - A^3\, dx^3$
Lorentz-eichung	$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \operatorname{div}\underline{A} = 0$	$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, A^\mu = 0$	$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\alpha} = 0$
Wellen-gleichung	$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - \Delta\Phi = 4\pi\rho$ $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A} - \Delta\underline{A} = \frac{4\pi}{c}\,\underline{j}$	$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c}\, j^\mu$	$(\mathsf{d}\delta + \delta\mathsf{d})\,\boldsymbol{\alpha} = \frac{4\pi}{c}\,{*}\boldsymbol{\iota}$
Felder	$\underline{E}$, $\underline{B}$	$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{\beta} = E^1\, dx^0 \wedge dx^1 + E^2\, dx^0 \wedge dx^2 + E^3\, dx^0 \wedge dx^3 - B^3\, dx^1 \wedge dx^2 + B^2\, dx^1 \wedge dx^3 - B^1\, dx^2 \wedge dx^3$
Maxwellsche Gleichungen	$\operatorname{div}\underline{E} = 4\pi\rho$ $\operatorname{rot}\underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$ $\operatorname{div}\underline{B} = 0$ $\operatorname{rot}\underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0$	$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, {*}F^{\mu\nu} = 0$	$\mathsf{d}{*}\boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\iota}$ $\mathsf{d}\boldsymbol{\beta} = 0$

	Elementar	**Vierertensoren**	**Differentialformen**
Lorentzkraft	$\underline{f} = \rho \underline{E} + \frac{1}{c}\, \underline{j} \times \underline{B}$	$f^\mu = \frac{1}{c}\, F^\mu{}_\rho\, j^\rho$	$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{c} *(*\boldsymbol{\beta} \wedge *\boldsymbol{\iota})$
Lagrangedichte	——	$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\, F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\, j^\alpha A_\alpha$ $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$	$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{8\pi} * \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathsf{d}\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{c}\, \boldsymbol{\iota} \wedge \boldsymbol{\alpha}$
Energie- Impulstensor	$w \;\; = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$ $\underline{S} \;\; = c^2 \underline{P} = \frac{c}{4\pi}\, \underline{E} \times \underline{B}$ $T^{ij} = \frac{-1}{4\pi}\Big[E^i E^j + B^i B^j$ $- \;\; \frac{1}{2}(E^2 + B^2)\, \delta^{ij}\Big]$	$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\Big[F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}\, g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\Big]$	$\boldsymbol{\tau}^\mu = -\, \frac{1}{4\pi}\Big[*\Big(*\boldsymbol{\beta} \wedge *(*\boldsymbol{\beta} \wedge dx^\mu)\Big)$ $+\; \frac{1}{2} *(*\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\beta})\, dx^\mu\Big]$
Energie- Impulsbilanz	$\frac{\partial}{\partial t} w + \operatorname{div} \underline{S} = (\, \underline{j} \cdot \underline{E}\,)$ $\frac{\partial}{\partial t} P^i + \operatorname{div} \boldsymbol{T}^{(i)} = -f^i$	$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\, T^{\mu\nu} = -f^\mu$	$\delta \boldsymbol{\tau}^\mu = -f^\mu$

Literaturverzeichnis

[BERU98] J.C.Baez, G.Egan, R.E.Rogers, N.Urban, ... *sci.physics.research*, Newsgroupbeiträge, (1998).

[BF83] M.Barner, F.Flohr, *Analysis II*, de Gruyter, Berlin- New York, 328f, (1983).

[BM94] J.C.Baez, J.P.Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore- New Jersey- London- Hong Kong, (1994).

[Ca46] É.J.Cartan, *Lecons sur la Geometrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1946).

[Ei05] A.Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. (Germany) **17**, 891-921 (1905).

[Fl63] H.Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York (1963).

[Gib93] J.W.Gibbs, *Quaternions and Vector Analysis*, Nature **48**, 364-367 (1893).

[Gil00] W.Gilbert, *De magnete, magneticisque corporibus et de magno magnete Tellure physiologia nova*, London (1600).

[Go83] H.Goldstein, *Klassische Mechanik (7. Auflage)*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1983).

[Gra44] H.G.Graßmann, *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik: dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, O.Wiegand, Leipzig, (1844).

[Gre82] W.Greiner, *Theoretische Physik Band 3: Klassische Elektrodynamik*, Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (1982).

[Ha43] W.R.Hamilton, *On a new Species of Imaginary Quantities connected with the Theory of Quaternions*, Irish Academy Proceedings **II**, 424-434 (1843).

[Hv93] O.Heaviside, *On the Forces, Stresses and Fluxes of Energy in the Electromagnetic Field*, Phil. Transactions, London (1893).

[Ja83] J.D.Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin- New York (1983).

[LL89] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Band II: Klassische Feldtheorie*, Akademie - Verlag, Berlin (1989).

[Ma65] J.C.Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Phil. Transactions, London, 459-512 (1865).

[Ma73] J.C.Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford University Press, Oxford (1873).

[Mer70] E.Merzbacher, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester- Brisbane- Toronto (1970).

[Mes85] A.Messiah, *Quantenmechanik Bd. II*, de Gruyter, Berlin- New York (1985).

[Mi09] H.Minkowski, *Raum und Zeit*, Phys. Zeitschr. **10**, 104-111 (1909).

[MTW73] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, *Gravitation*, W.H.Freeman and Company, New York (1973).

[MW70] J.Mathews, R.L.Walker, *Mathematical Methods of Physics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Menlo Park- Reading- London-Amsterdam- Don Mills- Sydney (1970).

[Noe18] E.Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 235-257 (1918).